SUPERCONDUCTIVITY OF METALS AND ALLOYS

P. G. DE GENNES

Faculté des Sciences,
Orsay, France

W. A. BENJAMIN, INC.
NEW YORK – AMSTERDAM
1966

П. ДЕ ЖЕН

Сверхпроводимость металлов и сплавов

Перевод с английского
А. И. РУСИНОВА

Под редакцией
Л. П. ГОРЬКОВА

Издательство „МИР“

Москва 1968

УДК 539.2

Явление сверхпроводимости, открытое свыше 50 лет и нашедшее объяснение около 10 лет назад, получает все более широкое применение. Расширяются также экспериментальные и теоретические исследования сверхпроводящих материалов.

Предлагаемая читателям книга французского физика Де Жена в живой и физически ясной форме освещает важнейшие свойства сверхпроводников и современные теоретические представления, лежащие в основе интерпретации наблюдаемых эффектов и расчетов устройств для практических применений.

Книга рассчитана на физиков и инженеров, занимающихся экспериментальными исследованиями сверхпроводников, и студентов, приступающих к изучению сверхпроводимости.

ИНДЕКС 2-3-6

Редакция литературы по физике

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга известного французского физика-теоретика П. Де Жена представляет собой очень интересное явление. В ее основе лежит курс лекций по теории сверхпроводимости, рассчитанный на физиков, достаточно образованных, но с физикой сверхпроводников не знакомых. Нам кажется, что сейчас это лучшая книга, по которой можно действительно разобраться в самом явлении сверхпроводимости, почувствовать ее реальные проблемы — экспериментальные и теоретические. Книга живо написана, насыщена содержанием, хотя изложение местами отрывочно, а иногда небрежно.

Книга очень конкретна. Сейчас, когда прошло около десятка лет после создания микроскопической теории сверхпроводимости, для многих физиков достаточно знать основные идеи теории и быть уверенными, что с этой теорией все в порядке. С другой стороны, различные физические приложения сверхпроводимости становятся все более и более существенными. Для этих приложений совершенно необязательно пускать в ход весь громоздкий механизм микроскопической теории. Большинство явлений может быть описано на весьма простой основе. По моему мнению, этот момент является самой сильной стороной книги Де Жена. Излагая очень сжато, но в то же время очень понятно и просто основные идеи современной теории сверхпроводимости, автор сумел вместить в небольшую по объему книгу решение огромного количества физических задач.

Отметим, что автор, ссылаясь на те или иные оригинальные работы, часто не приводит библиографических данных. В большинстве случаев это сделано переводчиком. Кроме того, в русском издании добавлен ряд новых ссылок и дано несколько редакционных примечаний. Для русского издания автор любезно прислал краткое предисловие и ряд уточнений и дополнений к тексту. Считаю своим приятным долгом поблагодарить его за это.

Член-корреспондент АН СССР
Л. П. Горьков

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основе этой книги лежат записи лекций, прочитанных автором в Орсэ в период 1962—1963 гг. Этот курс лекций носил вводный характер, и главная цель его состояла в том, чтобы ознакомить экспериментаторов и теоретиков нашей небольшой группы (включая лектора) с основными сведениями о сверхпроводимости и, исходя из этого, начать планирование новых экспериментов.

Вполне возможно (и такой путь нам казался заманчивым) подойти к явлению сверхпроводимости как к новому случаю дальнего порядка и затем из рассмотрения фазы параметра упорядочения вывести сверхтекучие свойства, квантование потока и эффект Джозефсона. Несколько позднее можно было бы получить уравнения Гинзбурга—Ландау и обсудить магнитные свойства сверхпроводников. Наконец, сделав целый ряд конкретных допущений, можно было бы прийти к теории Бардина — Купера — Шриффера и ее применениям.

Однако нам в Орсэ хотелось как можно скорее приступить к экспериментам по сверхпроводимости, поэтому мы даже не пытались осуществить вышеуказанный подход. Изложение начинается с элементарного обсуждения магнитных свойств сверхпроводников первого и второго рода. Потом строится микроскопическая теория на основе боголюбовского представления самосогласованного поля; такой подход оказывается достаточно общим, чтобы при рассмотрении охватить интересные ситуации, в которых параметр порядка модулирован в пространстве. Кроме того, этот метод позволяет в какой-то мере сохранить интуитивные представления, основанные на одночастичных волновых функциях. На этой стадии параллельно со свойствами чистых металлов систематически обсуждаются свойства сплавов, и в частности так называемых „грязных" сплавов. (Последние, несмотря на название, являются зачастую наиболее чистыми системами, с которыми нам удается экспериментировать.)

Ряду вопросов мы сознательно уделили мало внимания. Так, до минимума сведено обсуждение электрон-электронных взаимодействий, поскольку для большинства металлических сверхпроводников (как и для случая ферромагнитных металлов) до настоящего момента не удается строго вычислить значения фундаментальных констант связи. Мы не касаемся также моделей, которые в прошлом оказались весьма полезными, но редко применяются в новых работах; примерами такого рода могут служить теория Гортера — Казимира, ламинарная модель смешанного состояния сверхпроводников второго

рода. Некоторые другие вопросы не обсуждаются потому, что для их рассмотрения требуется более высокий теоретический уровень, чем принятый в наших лекциях; к ним относятся, в частности, эффекты так называемой „сильной связи", вопрос о возбужденных состояниях куперовских пар и эффекты, связанные с разрушением анизотропии параметра порядка в k-пространстве при внесении примесей.

Книга в ее настоящем виде представляет результат усилий многих лиц, прямо или косвенно участвовавших в ее создании. Обсуждение обобщенного метода самосогласованного поля применительно к ядрам, проводившееся на семинаре, руководимом К. Блохом, явилось исходной точкой при написании гл. V. Короткая заметка П. Андерсона о спин-орбитальных эффектах послужила основой для используемого нами подхода к проблемам, касающимся „грязных" сверхпроводников. Группа в Орсэ в составе Ж. Бурже, Г. Дейчера, Е. Гийона, К. Кароли, А. Мартинэ, Ж. Матрикона совместно с нашими друзьями Д. Сент-Джеймсом, Г. Сарма, М. Тинкхамом и П. Пинкусом участвовала в обсуждении и уточнении разделов, в которых затрагиваются последние достижения. Автор хотел бы выразить каждому из них свою глубокую благодарность и особо упомянуть П. Пинкуса, взявшего на себя труд по подготовке американского издания, а также М. Тинкхама, критически прочитавшего окончательный вариант рукописи. Автор надеется, что воодушевление, которое мы испытывали в тот период догадок и споров, в какой-то мере передастся читателю и найдет в нем отклик.

В конце каждой главы приведено очень ограниченное число ссылок на дополнительную литературу. Они не претендуют на полноту и не учитывают вопросов приоритета: например, я всегда рекомендовал студентам не оригинальную статью Бардина, Купера и Шриффера, а лекции Тинкхама, прочитанные в летней школе физики в Лезуш, в которых материал излагается в более доступной форме.

П. Де Жен

Орсэ,
октябрь 1965

К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Я хотел бы выразить глубокую благодарность А. Русинову, выполнившему перевод книги на русский язык, и редактору русского издания проф. Л. Горькову. Мне кажется, что такие объединенные усилия физиков разных стран являются типичным примером международной солидарности ученых, которую мы должны стремиться всячески развивать и поддерживать.

П. Де Жен

Глава I

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

§ 1. НОВЫЙ ТИП КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Возьмем кусок олова и охладим его; при определенной температуре $T_c = 3{,}7°$ К мы обнаружим скачок его теплоемкости (фиг. 1,*а*). Очевидно, что при более низких температурах ($T < T_c$) олово находится в новом термодинамическом состоянии. Что же произошло?

Этот переход *не связан* с изменением кристаллической структуры. Об этом мы знаем из данных рентгеновского анализа. Он также *не имеет* ничего общего с ферро- или антиферромагнитным переходом. (С помощью магнитного рассеяния нейтронов можно убедиться в том, что атомы олова не приобретают магнитного момента.) Поразительной особенностью этого перехода является то обстоятельство, что в новом состоянии электрическое сопротивление олова равно нулю. (Например, наблюдалось, что ток, наведенный в кольце из олова, циркулировал в нем свыше года без затухания.) Таким образом, олово в этой новой особой фазе становится, как говорят, сверхпроводником, а незатухающий ток в нем называют сверхпроводящим током.

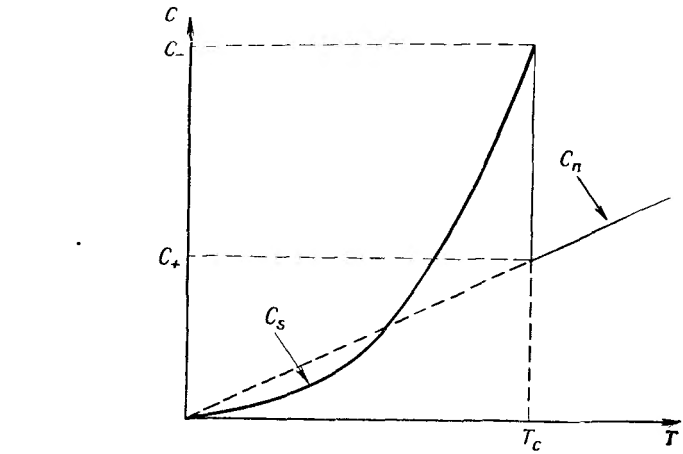
Сверхпроводниками может быть большое число металлов и сплавов, причем критическая температура T_c меняется в пределах $0{,}1° \text{ К} \lesssim T_c < 18° \text{ К}$[1]. Недавно было обнаружено, что некоторые сильно легированные полупроводники также являются сверхпроводниками[2]. Исторически первый сверхпроводник (ртуть) был открыт Камерлинг-Оннесом [1] в 1911 г.

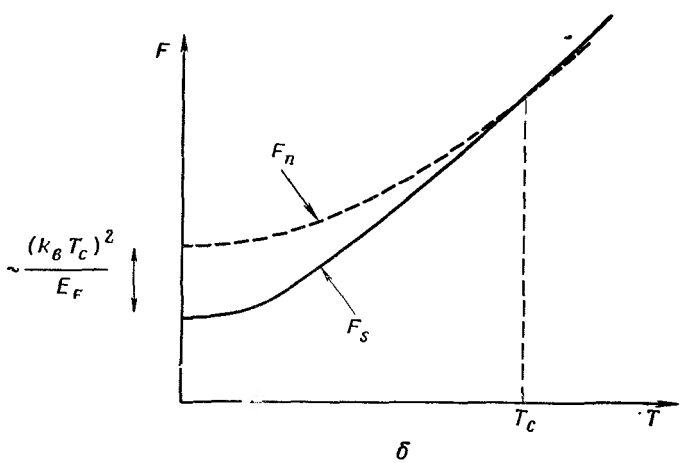
На основе опытных данных по теплоемкости можно вычислить плотность свободной энергии F_s сверхпроводящей фазы; на фиг. 1, *б* она представлена сплошной линией. Пунктирная линия изображает соответствующую кривую F_n нормального металла. Разность $(F_n - F_s)_{T=0}$ носит название энергии конденсации; в расчете на один электрон она равна по порядку величины $(k_B T_c)^2/E_F$, что существенно *меньше* энергии $k_B T_c$ (E_F — фермиевская энергия электронов проводимости в нормальном металле). Используя типичные значения $E_F \sim 1$ *эв* и $k_B T_c \sim 10^{-3}$ *эв*, находим, что доля проводящих электронов, заметно изменяющих свою энергию в процессе конденсации, весьма мала и составляет величину $\sim k_B T_c/E_F \sim 10^{-3}$.

---

[1]) В соединениях $Nb_3Al + Nb_3Ge$ получена наиболее высокая в настоящее время температура перехода, равная 20,4° К [2]. — *Прим. ред.*

[2]) См. [3, 4]. — *Прим. ред.*





Ф и г. 1. Поведение термодинамических величин при сверхпроводящем переходе.

а — температурная зависимость электронной теплоемкости сверхпроводника C (в расчете на один атом) в отсутствие магнитного поля. Выше T_c (нормальная фаза) теплоемкость линейна, $C_n \sim k_B^2 T/E_F$. При низких температурах $T \ll T_c$ теплоемкость меняется по экспоненциальному закону $C_s \sim \exp(-1{,}76 T_c/T)$; в точке перехода $T = T_c$ имеется скачок теплоемкости.

б — температурная зависимость плотности свободной энергии (в расчете на один атом) сверхпроводящей (F_s) и нормальной (F_n) фаз. Кривые касаются в точке перехода $T = T_c$. При $T = 0$ разность $F_n - F_s$ имеет порядок $(k_B T_c)^2/E_F$.

§ 2. ДИАМАГНЕТИЗМ

Уравнение Ф. и Г. Лондонов

Распространим теперь начатое выше энергетическое рассмотрение на тот случай, когда в образце имеются сверхпроводящие токи с плотностью $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$ и связанные с ними магнитные поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$[1]. Мы увидим, что в пределе, когда все поля, токи и т. д. являются слабыми и медленно изменяются в пространстве, условие минимума свободной энергии приводит к простому соотношению между полями и токами (Ф. Лондон и Г. Лондон [5, 6], 1935 г.).

Для этого рассмотрим чистый металл с параболической зоной проводимости; эффективная масса электронов равна m. Свободная энергия имеет теперь следующий вид:

$$\mathcal{F} = \int F_s d\mathbf{r} + E_{\text{кин}} + E_{\text{магн}}, \tag{1.1}$$

где F_s — отнесенная к единице объема энергия электронов в конденсированном состоянии в системе покоя, а $E_{\text{кин}}$ — кинетическая энергия, связанная с незатухающими токами. Обозначим через $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ скорость дрейфа электронов в точке $\mathbf{r}$. Она связана с плотностью тока $\mathbf{j}_s$ соотношением

$$n_s e \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_s(\mathbf{r}), \tag{1.2}$$

где e — заряд электрона, n_s — число „сверхпроводящих" электронов в 1 $см^3$ вещества. Кинетическую энергию можно записать в следующем простом виде:

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \int n_s m v^2 d\mathbf{r}, \tag{1.3}$$

где интеграл берется по объему образца. Выражение (1.3) было бы точным в случае однородного течения ($\mathbf{v} = \text{const}$); в рассматриваемой задаче оно остается справедливым приближенно при условии, что скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — *медленно меняющаяся функция* $\mathbf{r}$ (позже мы вернемся к этому ограничению).

Наконец, энергия $E_{\text{магн}}$, связанная с магнитным полем $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, определяется соотношением

$$E_{\text{магн}} = \int \frac{h^2}{8\pi} d\mathbf{r}. \tag{1.4}$$

Поле $\mathbf{h}$ связано с плотностью тока $\mathbf{j}_s$ уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s. \tag{1.5}$$

---

[1]) Мы используем $\mathbf{h}$ для обозначения локального поля; символ $\mathbf{H}$ сохранен для обозначения термодинамического поля.

Используя (1.3) — (1.5), представим свободную энергию $\mathcal{F}$ в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{1}{8\pi}\int \left(\mathbf{h}^2 + \lambda_L^2 |\operatorname{rot}\mathbf{h}|^2\right) d\mathbf{r},$$
$$\mathcal{F}_0 = \int F_s\, d\mathbf{r}, \tag{1.6}$$

где величина λ_L, имеющая размерность длины, определяется следующим образом:

$$\lambda_L = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}\right)^{1/2} \tag{1.7}$$

(при $T=0$ имеем $n_s = n$, где n — полное число электронов проводимости в 1 $см^3$). С помощью этого выражения мы можем оценить значение λ_L. Для простых металлов, например Al, Sn и т. п., в которых масса m близка к массе свободного электрона, находим $\lambda_L \sim 500$ Å. В переходных металлах и соединениях с узкой d-зоной масса m больше, соответственно больше длина λ_L (до 2000 А).

Будем теперь минимизировать свободную энергию (1.6) относительно распределения поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$. При изменении поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ на величину $\delta\mathbf{h}(\mathbf{r})$ энергия $\mathcal{F}$ меняется на $\delta\mathcal{F}$:

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi}\int \left(\mathbf{h}\cdot\delta\mathbf{h} + \lambda_L^2 \operatorname{rot}\mathbf{h}\cdot\operatorname{rot}\delta\mathbf{h}\right) d\mathbf{r} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int \left(\mathbf{h} + \lambda_L^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h}\right)\cdot\delta\mathbf{h}\, d\mathbf{r}. \tag{1.8}$$

(Второй член мы проинтегрировали по частям.) Следовательно, конфигурация поля внутри образца, приводящая к минимуму свободной энергии, должна удовлетворять уравнению

$$\mathbf{h} + \lambda_L^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h} = 0. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) впервые было предложено (в несколько иных обозначениях) Ф. Лондоном и Г. Лондоном. Совместно с уравнением Максвелла (1.5) оно позволяет находить распределение полей и токов.

Эффект Мейсснера

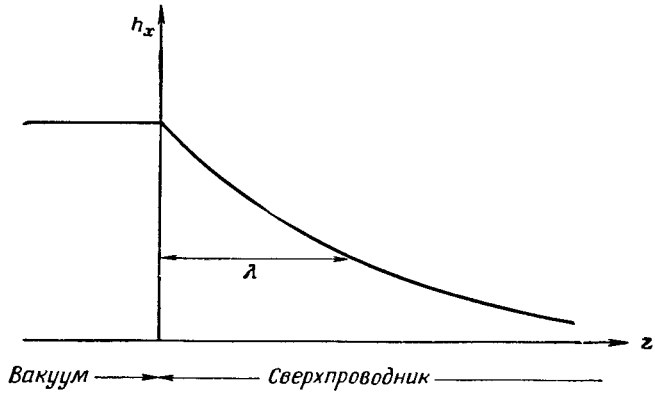
Применим теперь уравнение Лондонов (1.9) к задаче о проникновении магнитного поля $\mathbf{h}$ в сверхпроводник. Выберем простейшую геометрию: поверхность образца совпадает с плоскостью xy, область $z<0$ является пустой (фиг. 2). Тогда поле $\mathbf{h}$ и ток $\mathbf{j}_s$ зависят лишь от z. Помимо уравнения (1.9), имеют место, как обычно, уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s, \tag{1.10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{h} = 0. \tag{1.11}$$

Возможны два случая:

1. Поле $\mathbf{h}$ параллельно оси z. Тогда уравнение (1.11) дает просто $dh/dz = 0$, т. е. поле $\mathbf{h}$ постоянно в пространстве. Поэтому, как следует из уравнения (1.10), $\operatorname{rot} \mathbf{h} = 0$ и $\mathbf{j}_s = 0$. Подставляя этот результат в уравнение (1.9), находим, что $\mathbf{h} = 0$, т. е. поле не может быть нормально к поверхности образца.



Фиг. 2. Проникновение слабого магнитного поля в сверхпроводник (λ — глубина проникновения поля).

На расстояниях, в несколько раз превышающих глубину проникновения λ, поле становится пренебрежимо малым. В тех случаях, когда справедливо лондоновское уравнение (1.9), поле изменяется экспоненциально $[h = h_0 \exp(-z/\lambda_L)]$.

2. Поле $\mathbf{h}$ тангенциально (и направлено вдоль оси x). В этом случае уравнение (1.11) удовлетворяется автоматически, а из уравнения (1.10) следует, что ток $\mathbf{j}_s$ направлен вдоль оси y

$$\frac{dh}{dz} = \frac{4\pi}{c} j_s. \tag{1.12}$$

Наконец, уравнение (1.9) дает

$$\frac{dj_s}{dz} = \frac{n_s e^2}{mc} h, \tag{1.13}$$

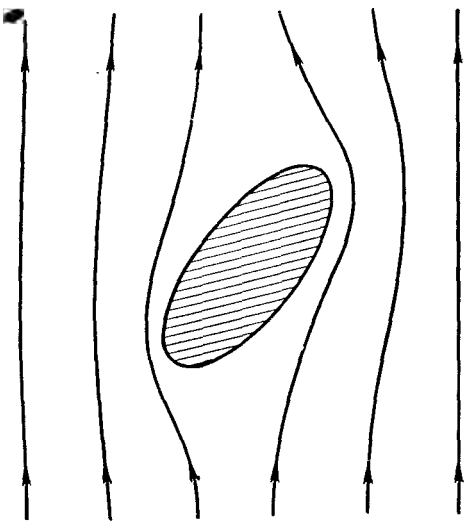
$$\frac{d^2h}{dz^2} = \frac{h}{\lambda_L^2}, \qquad \lambda_L^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}. \tag{1.14}$$

Решение, конечное внутри сверхпроводника, является экспоненциально убывающим:

$$h(z) = h(0)\, e^{-z/\lambda_L}, \tag{1.15}$$

т. е. *внутрь образца поле проникает лишь на глубину* λ_L. Этот результат, полученный для полупространства, легко обобщить на случай макроскопического образца произвольной формы. Как мы уже

видели, „глубина проникновения“ λ_L мала, поэтому для любой геометрии *слабое* магнитное поле практически совсем не проникает в макроскопический образец [1] (т. е. образец, размеры которого велики по сравнению с глубиной проникновения). Силовые линии вытесняются образцом, как это показано на фиг. 3.



Фиг. 3. Выталкивание магнитных силовых линий макроскопическим сверхпроводником (т. е. сверхпроводником, размеры которого значительно превышают глубину проникновения).

В не слишком сильных полях сверхпроводник выталкивает силовые линии полностью (эффект Мейсснера).

В равновесии сверхпроводник находится в состоянии, в котором сумма кинетической и магнитной энергий минимальна; для макроскопических образцов это состояние отвечает полному выталкиванию наружу магнитного потока.

Выталкивание силовых линий было обнаружено в 1933 г. в опытах Мейсснера и Оксенфельда [7]. Эти результаты особенно важны тем, что была доказана истинная равновесность достигнутого состояния.

Относительно приведенного вывода необходимо сделать три замечания:

1. Предположив существование незатухающих токов в термодинамически равновесном состоянии, мы пришли к заключению о наличии у сверхпроводников диамагнитных свойств. Более привычным, однако, является обратный ход рассуждений, когда в качестве от-

[1] В более сильном поле этот результат может оказаться полностью или частично неверным.

правного момента берется эффект Мейсснера, а затем делается вывод о существовании незатухающих токов. Я предпочел первый способ, поскольку хотел на этом примере показать, из каких частей составляется полная энергия сверхпроводника [см. (1.6)], что будет полезно в дальнейшем (гл. III).

2. Уравнение (1.9) мы получили из условия минимума свободной энергии $\mathscr{F}$, являющейся правильным термодинамическим потенциалом для случая, когда внешнее поле создается постоянными магнитами. В том случае когда источником поля служит катушка с заданным током I, правильным термодинамическим потенциалом является не $\mathscr{F}$, а так называемый термодинамический потенциал Гиббса $\mathscr{G}$[1]. К счастью, можно показать, что оба потенциала приводят к одинаковому условию локального равновесия в образце (обсуждение этого вопроса см. в гл. II).

3. Отметим, что вышеприведенный расчет справедлив лишь при условии, что приложенное поле является достаточно слабым. В более сильных полях энергетически выгодным может оказаться разрушение сверхпроводимости в некоторых областях образца и связанное с ним проникновение в сверхпроводник силовых линий магнитного поля. Детально этот вопрос будет рассмотрен в гл. II и III.

§ 3. ОТСУТСТВИЕ ВОЗБУЖДЕНИЙ МАЛЫХ ЭНЕРГИЙ

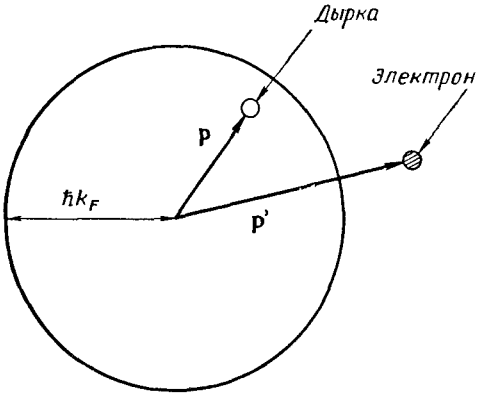
Рассмотрим сначала газ свободных невзаимодействующих электронов. Состояние индивидуального электрона характеризуется импульсом $\mathbf{p}$ и энергией $p^2/2m$. Основное состояние всей системы можно получить, помещая в соответствии с принципом Паули электроны в каждое состояние $\mathbf{p}$ так, чтобы все состояния, лежащие ниже энергии Ферми, оказались заполненными, а выше — пустыми. (Условие $p = p_F$ определяет в пространстве импульсов сферу Ферми.) Чтобы получить возбужденное состояние газа, достаточно переместить электрон из первоначально занятого состояния $\mathbf{p}\,(p \leqslant p_F)$ в пустое $\mathbf{p}'\,(p' > p_F)$

[1]) В дальнейшем читатель все время будет сталкиваться с терминами „потенциал Гиббса", „термодинамический потенциал Гиббса". Следует помнить, что в книге при этом имеется в виду потенциал свободной энергии во внешнем поле, причем в каждой конкретной задаче используются в качестве независимой переменной либо H, либо B. Это разные потенциалы, и их точное термодинамическое определение читатель найдет в книге Ландау и Лифшица [8]. Чтобы не употреблять слишком громоздких названий, при переводе чаще всего использовалось в соответствии с оригиналом название „потенциал Гиббса". При чтении книги это не вызывает никаких недоразумений. Стоит еще, может быть, заметить, что в качестве „обычных" независимых переменных автор берет V и T, тогда как в экспериментальной практике сверхпроводящий переход происходит при постоянном давлении. Как известно, изменением объема при переходе металл — сверхпроводник также можно пренебречь. Поэтому все дальнейшее изложение ведется достаточно корректно, если иметь в виду практические приложения. — *Прим. ред.*

(фиг. 4). Энергия, необходимая для возбуждения такой электрон-дырочной пары, равна

$$E_{\mathbf{pp'}} = \frac{p'^2 - p^2}{2m} \geqslant 0. \qquad (1.16)$$

Если оба импульса p и p' лежат близко к поверхности Ферми, то энергия $E_{\mathbf{pp'}}$ мала. Иными словами, в газе свободных электронов имеется огромное число возбуждений с малыми энергиями. В нормальном металле картина свободного газа электронов качественно не меняется. Наличие возбуждений малых энергий проявляется в следующих экспериментальных результатах:



Фиг. 4. Возбужденное состояние электронного газа в нормальном металле, возникающее в результате перемещения электрона из состояния с импульсом $\mathbf{p}$ внутри ферми-сферы в состояние $\mathbf{p}'$ снаружи от нее.

Если импульсы p и p' близки по величине к фермиевскому импульсу $p_F = \hbar k_F$, то энергия возбуждения $(p'^2 - p^2)/2m$ мала.

а) Теплоемкость нормального металла пропорциональна температуре T и сравнительно велика [порядка $k_B(k_B T/E_F)$ на один электрон].

б) При воздействии на систему электронов внешних возмущений малой частоты (электромагнитных волн, ультразвука, прецессии ядерного спина и т. д.) в ней возникают сильные диссипативные процессы.

Для большинства сверхпроводников дело обстоит совершенно иначе. В этом случае выражение (1.16) более непригодно для определения энергии $E_{\mathbf{pp'}}$, необходимой для рождения пары возбуждений; последняя, во всяком случае, должна превышать вполне определенную величину, равную „энергии спаривания“ 2Δ:

$$E_{\mathbf{pp'}} \geqslant 2\Delta. \qquad (1.17)$$

Эта „щель“ 2Δ связана с температурой перехода приближенным соотношением $2\Delta = 3{,}5 k_B T_c$. Типичное значение 2Δ имеет порядок 10° K (как видно из табл. 1).

Таблица 1

Величиина энергетической щели при абсолютном нуле *

Металл	2Δ, °K		
	I	II	III
Zn		3,17	
Cd	1,8		
Hg	18,4		18,0
Al	6,01	4,4	4,2
In	13,6	11,9	11,9
Ga		4,03	
Sn	13,0		12,9
Pb	28,7		30,9
V	18,0	18,5	18,0
Nb	27,4	37,4	35,0
Ta		15,7	16,1

* Данные взяты из работы [9]. Величина 2Δ определялась следующими методами: I — поглощение фотонов микроволновой или далекой инфракрасной области; II — затухание ультразвука (ультразвуковые эксперименты часто проводятся на монокристаллах, поэтому величина щели в этом случае может несколько зависеть от направления распространения звуковой волны); III — туннельные эксперименты.

Заметим, что 2Δ — минимальная энергия, требуемая для рождения пары возбуждений; энергия, приходящаяся на одно возбуждение, равна Δ.

Величина Δ измеряется на опыте с помощью целого ряда различных методов. Здесь мы укажем на некоторые из них:

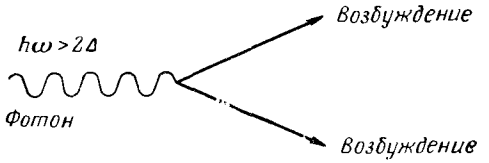
1. Измерения теплоемкости при низких температурах. Теплоемкость изменяется экспоненциально как $\sim \exp(-\Delta/k_BT)$.

2. Измерение поглощения электромагнитного излучения. Фотон с частотой ω может создать электронно-дырочную пару лишь при условии, что $\hbar\omega \geqslant 2\Delta$ (фиг. 5, *а*). (Это соответствует фотонам далекой инфракрасной области; типичные длины волн лежат в миллиметровом диапазоне.)

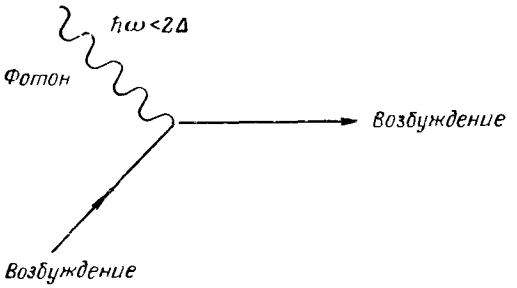
3. Затухание ультразвука. В этом случае фотон имеет низкую частоту, поэтому его распад с образованием пары возбуждений невозможен. Однако фотон может поглотиться при столкновении с уже существующим возбуждением (фиг. 5, *б*); вероятность такого процесса пропорциональна числу имеющихся возбуждений и при низких температурах мала, $\sim \exp(-\Delta/k_BT)$.

4. Туннельный эффект. Сверхпроводник S и нормальный металл N разделены тонким непроводящим слоем (толщина обычно около

25 Å), который создает энергетический барьер между ними (фиг. 6, *а*). Однако существует конечная вероятность прохождения электронов через этот барьер (туннельный эффект). При этом электрон должен быть возбужден из конденсированной фазы, что требует затраты энергии, равной Δ. Следовательно, при низких температурах



а



б

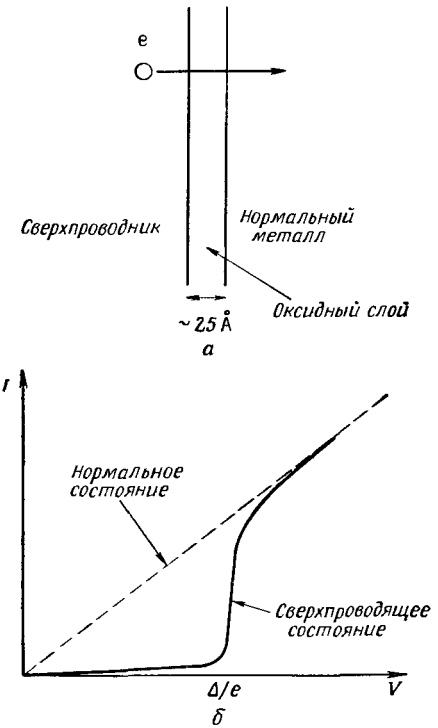
Фиг. 5. Типичные процессы, приводящие к диссипации энергии в сверхпроводнике.

а — порождение фотоном пары возбуждений (процесс возможен лишь при $\hbar\omega > 2\Delta$). *б* — поглощение фотонов имеющимися возбуждениями. Этот процесс может произойти даже в том случае, когда $\hbar\omega < 2\Delta$. При низких температурах число тепловых возбуждений мало и такой процесс идет медленно. Аналогичные процессы имеют место при замене фотона на фонон.

($T \ll T_c$) ток практически отсутствует до тех пор, пока величина eV, т. е. энергия, которую приобретает электрон за счет приложенной к барьеру разности потенциалов V, не станет больше Δ. Типичная вольтамперная характеристика показана на фиг. 6, *б* (сопротивление V/I контакта размером 1×1 *мм*^{2} в нормальном состоянии лежит в пределах от 10^{-2} до 10^4 *ом*).

Возникает вопрос: является ли наличие энергетической щели необходимым условием для существования незатухающего тока („сверхтекучести" электронного тока)? На этот вопрос следует ответить отрицательно — известен ряд примеров, когда эта „сверхтекучесть" имеет место, даже если нет щели в спектре элементарных возбуждений. Простейшим примером может служить так называемая „поверхностная сверхпроводимость". Явление состоит в том, что некоторые металлы или сплавы в определенной области

значений магнитного поля являются сверхпроводящими лишь в узком слое (толщиной $\sim$ 1000Å) вблизи поверхности образца. В этом случае отсутствует щель в энергетическом спектре всей системы. Возбуждения могут „просачиваться" из внутренних (нормальных) областей на поверхность образца. Приповерхностный слой остается тем не менее в сверхпроводящем состоянии. (Это заключение было проверено недавно в экспериментах по туннельному эффекту.) Имеются также и другие примеры; некоторые из них мы обсудим позже.



Фиг. 6. Туннельный контакт между нормальным металлом и сверхпроводником.

а — геометрия системы; *б* — вольтамперные характеристики для случаев, когда *S*-сторона является сверхпроводящей ($T \ll T_c$) или нормальной ($T > T_c$). Если оба металла находятся в нормальном состоянии, сопротивление перехода размером 1×1 *мм*^{2} лежит обычно в пределах от 10^{-2} *ом* до 10^4 *ом*. При низких температурах $T \ll T_c$ для извлечения одиого электрона из сверхпроводящего конденсата требуется минимальная энергия Δ, поэтому при $eV < \Delta$ ток практически отсутствует.

§ 4. ДВА ТИПА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

При выводе уравнения Лондонов (1.9) мы предположили, что скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, или, то же самое, плотность сверхпроводящего тока $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$, медленно изменяется в пространстве. Здесь мы хотели бы

уточнить, что надо понимать под словами „медленно изменяется". В конденсированной системе скорости двух электронов 1 и 2 коррелированы, если расстояние между ними R_{12} меньше определенной величины; для чистых металлов эта корреляционная длина обозначается через ξ_0. Наш вывод справедлив, когда скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ мало меняется на расстояниях порядка ξ_0. Для оценки ξ_0 заметим, что область существенных значений импульсов электронов задается неравенством

$$E_F - \Delta < \frac{p^2}{2m} < E_F + \Delta, \tag{1.18}$$

где E_F — энергия Ферми. Толщина соответствующего слоя в p-пространстве равна $\delta p \approx 2\Delta/v_F$, где $v_F = p_F/m$ — фермиевская скорость электронов. (Здесь мы учли тот факт, что всегда $\Delta \ll E_F$.) Минимальная протяженность в пространстве волнового пакета, образованного плоскими волнами с разбросом по импульсам δp, равна $\delta x \sim \hbar/\delta p$. Это приводит к следующему выражению:

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi\Delta}. \tag{1.19}$$

Множитель $1/\pi$ введен из соображений удобства для дальнейшего.) Длина ξ_0, определяемая выражением (1.19), носит название *длины когерентности* сверхпроводника.

Из (1.15) и (1.13) следует, что величины $\mathbf{h}$, $\mathbf{j}_s$ и $\mathbf{v}$ меняются на расстояниях порядка λ_L. Поэтому приведенный вывод уравнения Лондонов справедлив лишь при условии $\lambda_L \gg \xi_0$.

1. В простых (непереходных) металлах, как мы видели, глубина λ_L мала (~ 300 Å). Вместе с тем фермиевская скорость v_F велика ($\gtrsim 10^8$ *см/сек*) и в соответствии с (1.19) велик и параметр ξ_0 (для алюминия $\xi_0 \approx 10^4$ Å). Поэтому уравнение Лондонов непригодно для описания эффекта Мейсснера в этих металлах. Для того чтобы произвести расчет глубины проникновения в этом случае, необходимо заменить уравнение (1.9) несколько более сложным, форма которого была предложена Пиппардом. В дальнейшем мы будем называть такие сверхпроводники сверхпроводниками первого рода, или типа I (а также пиппардовскими); более подробно о них говорится в гл. II.

2. В переходных металлах и интерметаллических соединениях типа Nb_3Sn и V_3Ga эффективная масса электрона очень велика, глубина проникновения λ_L также велика (~ 2000 Å), а фермиевская скорость мала ($\sim 10^6$ *см/сек*). Кроме того, температура перехода T_c, выше которой сверхпроводимость исчезает, оказывается высокой ($T_c = 18°$ K для Nb_3Sn). Как мы увидим позже, параметр Δ примерно пропорционален T_c и поэтому тоже велик. По всем указанным причинам в таких материалах длина когерентности ξ_0 весьма мала

(~ 50Å), и уравнение (1.9) хорошо описывает их поведение в слабых полях. Мы будем называть их сверхпроводниками второго рода, или типа II (а также лондоновскими сверхпроводниками).

Для полноты необходимо упомянуть о случае сверхпроводящих сплавов, в которых длина когерентности и глубина проникновения становятся зависящими от длины свободного пробега электронов. Подробно этот вопрос мы обсудим в дальнейшем; качественно результат состоит в том, что если длина свободного пробега вследствие неупорядоченности структуры мала, то длина когерентности становится меньше значения $\xi_0 = \hbar v_F/\pi\Delta$ для чистого металла, а глубина проникновения λ_L, наоборот, возрастает по сравнению со значением (1.7). Поэтому часто оказывается, что добавление примесей в пиппардовский сверхпроводник переводит его в лондоновский.

Отмеченное здесь различие между двумя типами сверхпроводников имеет принципиальное значение при постановке любых экспериментов в присутствии внешних магнитных полей. Исторически сложилось так, что в течение 20 лет после открытия эффекта Мейсснера эксперименты проводились главным образом на сверхпроводниках первого рода. Детальное изучение сверхпроводников второго рода началось совсем недавно. Парадоксально, что теория развивалась в обратном порядке: уравнение (1.9) было введено братьями Лондонами в 1935 г., а необходимые видоизменения для сверхпроводников первого рода были предложены Пиппардом лишь в 1953 г. Перейдем теперь к подробному рассмотрению магнитных свойств сверхпроводников обоих типов.

ЛИТЕРАТУРА

Уравнения Лондонов

London F., Superfluids, 2d ed., vol. I, New York, 1961.

Обсуждение экспериментальных данных о сверхпроводниках

Lynton E. A., Superconductivity, 2d ed., London, 1965. (Имеется перевод 1-го издания: Э. А. Линтон, Сверхпроводимость, изд-во „Мир", 1964.)

Развитие представлений о сверхпроводимости

Bardeen J., Schrieffer J. R., в книге Progress in Low Temperature Physics, ed. C. G. Gorter, vol. III, Amsterdam, 1961. (Имеется перевод: Дж. Бардин, Дж. Шриффер, Новое в изучении сверхпроводимости, М., 1962.)

Blatt J. M., Theory of Superconductivity, New York, 1964.

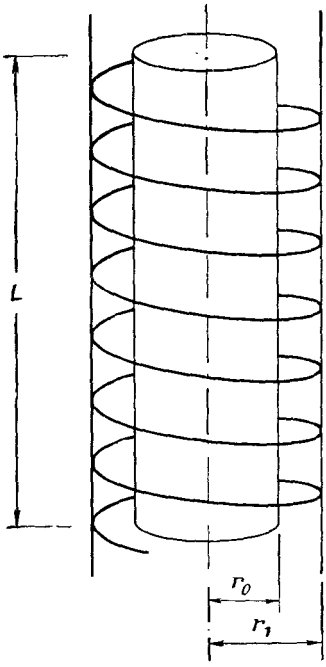
Quantum Fluids, ed. D. F. Brewer, Amsterdam, 1966.

Глава II

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ ПЕРВОГО РОДА

§ 1. КРИТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

Поместим длинный сверхпроводящий цилиндр радиусом r_0 в соленоид радиусом $r_1 > r_0$ (фиг. 7). По обмотке соленоида течет слабый ток I. Возникающее распределение поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ показано на фиг. 8. Вне образца поле постоянно и равно H, а внутри оно быстро спадает до нуля (глубина проникновения поля $\lambda \sim 500$ Å). Ограничимся рассмотрением макроскопических образцов ($r_0 \gg \lambda$); в этом случае можно считать, что поле всюду в образце равно нулю.



Фиг. 7. Схема опыта по измерению критического поля.

Образец в форме длинного цилиндра (длиной L и радиусом r_0) помещен в катушку радиусом r_1.

Такое полное вытеснение потока наблюдается в слабом внешнем поле H; однако когда поле H достигает некоторой критической величины H_c, ситуация коренным образом изменяется: во-первых, поле становится однородным во всем объеме образца, во-вторых, образец перестает быть сверхпроводящим (в принципе в этом можно убедиться, измеряя сопротивление между концами цилиндра). Можно показать, что для достаточно совершенных образцов этот переход является обратимым: при уменьшении тока соленоида I сверхпроводящее состояние восстанавливается и магнитный поток опять полностью вытесняется из образца. Типичные значения H_c приведены в табл. 2. С возрастанием температуры критическое поле убывает, что приближенно описывается соотношением

$$H_c(T) = H_c(0)\left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right). \qquad (2.1)$$

(При $T > T_c$ материал находится в нормальном состоянии даже в нулевом поле, T_c — температура перехода в отсутствие поля.) Зная H_c, можно вычислить разность свободных энергий образца в нормальном и сверхпроводящем состояниях.

Таблица 2

Значения T_c и H_c для некоторых металлов

	Zn	Cd	α Hg	Al	Ga	In	Tl	Sn	Pb
$H_c(0)$, *гс*	53	30		99	51	283	162	306	803
T_c, °K	0,88	0,56	4,15	1,19	1,09	3,41	1,37	3,72	7,18

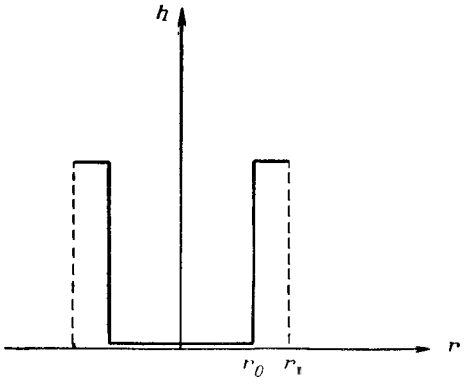
а) Когда цилиндр находится в нормальном состоянии, поле в соленоиде однородно и равно

$$h = \frac{4\pi NI}{cL}, \tag{2.2}$$

где N — число витков соленоида, L — его длина, совпадающая с длиной образца. Свободная энергия системы равна

$$\mathcal{F}_a = \pi r_0^2 L F_n + \pi r_1^2 L \frac{h^2}{8\pi}, \tag{2.3}$$

где F_n — плотность свободной энергии образца в нормальном состоянии. Второй член в этой формуле представляет собой магнитную энергию, запасенную в катушке.



Фиг. 8. Распределение поля в цилиндре и катушке для случая, когда цилиндр является сверхпроводящим.

Поле проникает в цилиндр на расстояние, приблизительно равное глубине проникновения. В масштабе рисунка можно считать, что поле скачком обращается в нуль внутри образца.

б) Предположим теперь, что цилиндр переходит в сверхпроводящее состояние, причем ток в катушке поддерживается неизменным. Тогда поле в образце становится равным нулю, однако в области

$r_0 < r < r_1$ оно остается равным значению (2.2)[1]. Свободная энергия теперь принимает следующий вид:

$$\mathcal{F}_б = \pi r_0^2 L F_s + \pi (r_1^2 - r_0^2) L \frac{h^2}{8\pi}, \tag{2.4}$$

где F_s — плотность свободной энергии образца в сверхпроводящем состоянии. При записи соотношения (2.4) мы пренебрегли проникновением поля в образец, а также кинетической энергией экранирующих токов — оба эффекта носят поверхностный характер и в случае макроскопического цилиндра ($r_0 \gg \lambda$) их вклад мал.

Отметим, что $\mathcal{F}_б < \mathcal{F}_а$, поскольку, во-первых, $F_s < F_n$ и, во-вторых, магнитная энергия в состоянии "б" меньше, чем в состоянии "а". Разность $F_n - F_s$ находится путем следующего рассмотрения. При переходе из состояния "а" в состояние "б" заключенный в катушке поток ϕ уменьшается, вследствие чего в ней индуцируется напряжение V. Работа, совершаемая этим напряжением во внешней цепи, равна

$$\int VI\,dt = -\int_а^б \left(\frac{N}{c}\frac{d\phi}{dt}\right) I\,dt. \tag{2.5}$$

В процессе перехода ток I поддерживается постоянным, поэтому

$$\int VI\,dt = \frac{N}{c} I(\phi_а - \phi_б) = \frac{NI}{c}\pi r_0^2 h = \pi r_0^2 L \frac{h^2}{4\pi}. \tag{2.6}$$

Если состояния "а" и "б" находятся в равновесии ($h = H_c$), то должно выполняться равенство

$$\mathcal{F}_а - \mathcal{F}_б = \int VI\,dt.$$

Используя (2.3) и (2.4), окончательно находим

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2}{8\pi}. \tag{2.7}$$

Полученное соотношение позволяет вывести ряд термодинамических свойств. Зафиксируем ток I и будем изменять температуру. Энтропия (на 1 $см^3$) каждой из фаз определяется формулами

$$S_n = -\frac{dF_n}{dT}, \quad S_s = -\frac{dF_s}{dT}. \tag{2.8}$$

---

[1]) Чтобы продемонстрировать это свойство, запишем уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{h} = 4\pi\mathbf{j}/c$ в интегральной форме

$$\oint \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \oint \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

а в качестве контура интегрирования возьмем силовую линию, проходящую через катушку в области $r_0 < r < r_1$. Для достаточно длинного соленоида можно пренебречь вкладом, вносимым в $\oint \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l}$ той частью силовой линии, которая проходит вне катушки. В результате получим $h = 4\pi NI/cL$.

Следовательно, для фаз, находящихся в равновесии, разность значений энтропии равна

$$S_n - S_s = -\frac{1}{4\pi} H_c \frac{dH_c}{dT}. \tag{2.9}$$

Отсюда находим скрытую теплоту перехода

$$L = T(S_n - S_s) = -\frac{T}{4\pi} H_c \frac{dH_c}{dT}. \tag{2.10}$$

Величина L положительна, т. е. при переходе из сверхпроводящего состояния в нормальное должно поглощаться тепло [1]).

Если переход происходит в отсутствие внешнего поля, то теплота L обращается в нуль. Действительно, при $T = T_c$ критическое поле H_c равно нулю. С другой стороны, опыт показывает, что для всех до сих пор изученных сверхпроводников производная dH_c/dT остается конечной. Таким образом, $[L]_{H=0} = 0$, т. е. *в нулевом поле сверхпроводящий переход является фазовым переходом второго рода.* В соответствии с этим теплоемкость в точке перехода испытывает скачок, равный [2])

$$C_n - C_s = \left[T \frac{d}{dT}(S_n - S_s)\right]_{T=T_c} = -\frac{1}{4\pi}\left[T\left(\frac{dH_c}{dT}\right)^2\right]_{T=T_c}. \tag{2.11}$$

Экспериментально установлено, что для ряда металлов соотношения (2.10) и (2.11) выполняются с точностью выше 1% (исключительно хорошее согласие найдено для Sn, In и Ta). При постановке таких экспериментов должна соблюдаться некоторая осторожность; в особенности необходимо быть уверенным в том, что достигнутое состояние является равновесным, т. е., например, отсутствуют "замороженные" потоки. Соотношения (2.10) и (2.11) представляют большой практический интерес, так как они связывают термодинамические величины (скрытую теплоту перехода и теплоемкость) с температурной зависимостью критического поля, которую часто легче измерить.

§ 2. ГЛУБИНА ПРОНИКНОВЕНИЯ

Связь между током и полем в сверхпроводниках первого рода

При макроскопическом подходе можно считать, что слабое поле ($h < H_c$) совсем не проникает в сверхпроводник первого рода. В микромасштабе, однако, поле на поверхности не может испытывать

[1]) Если при переходе из сверхпроводящего состояния в нормальное образец теплоизолирован, то его температура понижается.

[2]) Это соотношение часто называют формулой Рутгерса. — *Прим. ред.*

разрыва. Поэтому оно неизбежно проникает в металл на некоторую глубину λ. Вычислим эту величину.

В гл. I мы получили выражение для λ с помощью уравнения Лондонов

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc}\mathbf{h}, \tag{2.12}$$

которое, однако, неприменимо в рассматриваемом случае сверхпроводников первого рода ($\xi_0 \gg \lambda$). Необходимо найти более общую зависимость между полем и током, справедливую даже в случае быстрых изменений $\mathbf{j}$ и $\mathbf{h}$ в пространстве.

Как мы увидим, значительно более удобно использовать в качестве переменной вместо поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, связанный с полем соотношением

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{h}. \tag{2.13}$$

Соотношение (2.13) определяет вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ неоднозначно, поэтому часто оказывается удобным выбрать его так, чтобы выполнялись следующие дополнительные условия:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \\ &\mathbf{A}_n = 0 \quad \text{на поверхности образца,} \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\mathbf{A}_n$ — нормальная к поверхности образца компонента вектора $\mathbf{A}$. При выполнении условий (2.14) говорят, что вектор-потенциал $\mathbf{A}$ выбран в лондоновской калибровке. В этой калибровке уравнение (2.12) можно записать в виде

$$\mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc}\mathbf{A}. \tag{2.15}$$

Действительно, подстановка соотношения (2.15) в (2.13) приводит к уравнению (2.12), а подстановка в (2.14) дает

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{(уравнение непрерывности),} \\ &\mathbf{j}_n = 0 \quad \text{на поверхности образца.} \end{aligned}$$

Последнее условие выполняется, если к образцу не подводится внешних токов.

Соотношение (2.15) применимо лишь в том случае, когда $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$ медленно изменяются в пространстве на расстояниях $\sim \xi_0$. В общем случае можно предположить, что ток $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в определенной точке $\mathbf{r}$ зависит от вектора-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ во всех соседних точках $\mathbf{r}'$, удовлетворяющих условию $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \xi_0$. Феноменологическое соотношение для описания этого эффекта было предложено Пиппардом [10, 11]. В лондоновской калибровке оно имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = C \int \frac{[\mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}]\mathbf{R}}{R^4} e^{-R/\xi_0} d\mathbf{r}', \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \tag{2.16}$$

Коэффициент C легко определить, заметив, что при медленном изменении вектора-потенциала $\mathbf{A}$ (на расстояниях $\sim\xi_0$) его можно вынести из-под знака интеграла, а ток приравнять лондоновскому значению (2.15). В результате получаем

$$C=-\frac{3ne^2}{4\pi mc\xi_0}. \tag{2.17}$$

Такая простая форма соотношения (2.16) между током и векторпотенциалом была предложена Пиппардом на чисто феноменологической основе. Конечно, это была просто догадка. Позже в связи с развитием микроскопической теории было показано, что точная связь тока с полем очень напоминает соотношение (2.16), если выбрать

$$\xi_0=\frac{\hbar v_F}{\pi\Delta(0)} \quad (T=0). \tag{2.18}$$

Точное соотношение между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$ будет обсуждаться в гл. IV. Оно гораздо сложнее математически, чем приближенный результат Пиппарда (2.16), и поэтому последний до сих пор не утратил своего значения. Мы используем его сейчас для изучения глубины проникновения поля в сверхпроводник.

Глубина проникновения

Выражение (2.16) справедливо лишь для массивного сверхпроводника. Однако теперь нас интересует проникновение поля в образец, т. е. процессы, происходящие вблизи его поверхности. Вообще говоря, в этом случае соотношение между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$ видоизменяется. Для расчетов можно воспользоваться следующим правилом: сохраним выражение (2.16), но будем проводить интегрирование лишь по точкам $\mathbf{r}'$ сверхпроводника, из которых электрон, двигаясь по прямой линии, может попасть в точку $\mathbf{r}$. Так, если в металле имеется небольшая полость, то при интегрировании следует исключить область „тени", как показано на фиг. 9. (Это правило справедливо в обычном случае. когда отражение отдельных электронов от поверхности является диффузным. Ниже мы получим этот результат с помощью микроскопической теории.)

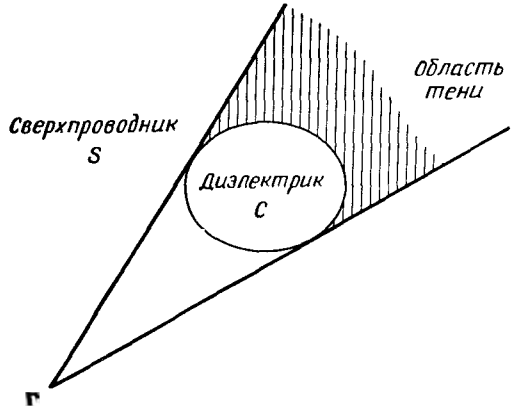
Рассмотрим образец, занимающий полупространство $z>0$; пусть его поверхность совпадает с плоскостью xy. Векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{j}$ направлены вдоль оси x. Глубину проникновения можно оценить с помощью следующих интуитивных соображений, принадлежащих Пиппарду. Если бы вектор $\mathbf{A}(z)$ был постоянен на расстояниях $\sim\xi_0$ вблизи поверхности, то из (2.16) мы получили бы в этой области лондоновский результат

$$\mathbf{j}=-\frac{ne^2}{mc}\mathbf{A}.$$

На самом же деле вектор-потенциал $\mathbf{A}(z)$ отличен от нуля в более узкой области толщиной λ, поэтому интеграл (2.16) следует уменьшить приблизительно в ξ_0/λ раз, т. е.

$$\mathbf{j} \approx -\frac{ne^2}{mc}\frac{\lambda}{\xi_0}\mathbf{A}, \qquad \lambda \ll \xi_0.$$

Используя это соотношение вместе с уравнением $\operatorname{rot}\mathbf{h} = (4\pi/c)\mathbf{j}$, мы получаем приближенный закон проникновения поля в виде $h(z) =$



Фиг. 9. «Эффект тени», возникающий при расчете тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ при наличии вектора-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$.

Полость или диэлектрическое включение занимает область C внутри сверхпроводника S; отражение электронов на SC-границе носит диффузный характер. Значения вектора-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ в области C и в области тени не дают вклада в ток $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.

$= h(0)\exp(-z/\lambda)$, где величина λ определяется следующим самосогласованным образом:

$$\lambda^{-2} = \frac{4\pi ne^2}{mc^2}\frac{\lambda}{\xi_0},$$

$$\lambda^3 = \lambda_L^2\xi_0, \qquad \lambda \ll \xi_0.$$

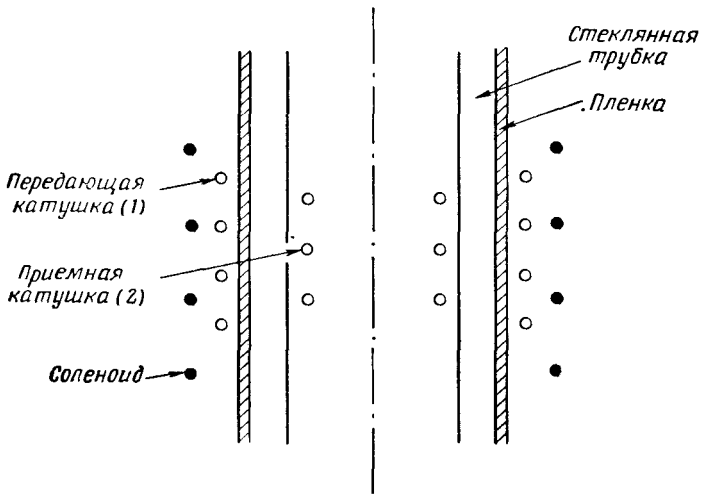
Строгий, но значительно более сложный расчет дает

$$\lambda^3 = 0{,}62\lambda_L^2\xi_0.$$

Существенный вывод, который можно сделать, состоит в том, что в пиппардовском пределе глубина проникновения λ становится больше лондоновского значения λ_L, а именно $\lambda/\lambda_L \sim \sqrt[3]{\xi_0/\lambda_L} \gg 1$, но тем не менее она значительно меньше длины когерентности ξ_0 $[\lambda/\xi_0 \sim (\lambda_L/\xi_0)^{2/3} \ll 1]$.

Методы измерения глубины проникновения

Исторически первые оценки величины λ были сделаны путем измерения магнитной восприимчивости очень малых образцов (коллоидальных частиц или тонких пленок)[1]). При использовании этого метода сначала убеждаются опытным путем, что температура перехода коллоидальных частиц (размером порядка 100 Å) не очень сильно отличается от температуры перехода массивного образца. Исходя из



Ф и г. 10. Индуктивный метод измерения глубины проникновения поля в тонкие цилиндрические пленки (Сарачик и др. [13]).

Катушка *1* создает поле, которое быстро убывает до нуля внутри пленки; расположенная внутри приемная катушка *2* регистрирует поле, прошедшее сквозь пленку. Соленоид используется для изучения зависимости глубины проникновения от магнитного поля.

этого обнадеживающего факта, делается вывод о том, что параметры n_s и $\Delta(0)$, входящие в выражения для ξ_0 и λ_L, также практически одинаковы как для мелких частиц, так и для массивного образца. Однако при таком подходе возникает ряд трудностей:

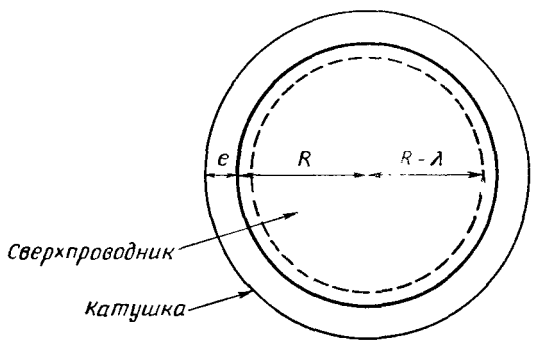
а) Размеры коллоидальных частиц характеризуются довольно значительным разбросом.

б) Вообще говоря, в такого рода материалах имеется значительное число дефектов решетки, поэтому длина свободного пробега электронов l довольна мала, и к тому же недостаточно хорошо известна. В то же время, если пробег l становится сравнимым с длиной когерентности ξ_0, то формула Пиппарда (2.16) должна быть видоизменена.

[1]) Подробнее см. статью Серина в книге [12]. — *Прим. ред.*

Другие методы определения глубины проникновения λ сводятся к измерению величины само- или взаимоиндукции в присутствии сверхпроводника. Схема расположения катушек при измерении взаимной индукции представлена на фиг. 10.

Катушка *1* создает поле h_e на внешней поверхности пленки и поле $h_i = \rho h_e \ll h_e$ во внутренней области, измеряемое с помощью катушки *2*. Зная ρ, с помощью соответствующего теоретического анализа можно определить λ. Практически можно измерить значение $\rho \gtrsim 10^{-9}$. Это позволяет работать с относительно толстыми пленками (толщиной $\sim 10\lambda$), у которых можно надежно определить кристаллографическую структуру. (Благодаря этому частично снимаются трудности, отмеченные выше в пункте „б".)



Фиг. 11. Метод определения глубины проникновения поля в сверхпроводящий цилиндр радиусом R.

Цилиндр окружен катушкой радиусом $R+e$. Магнитный поток заключен в кольце толщиной $e+\lambda$. На практике величина e точно неизвестна, поэтому удается измерить лишь изменение λ с температурой.

Можно также измерить самоиндукцию катушки, охватывающей сверхпроводящий цилиндр (метод Казимира [14][1]). Магнитный поток заключен в области с площадью сечения $\sim \pi R(e+\lambda)$, где e — расстояние между катушкой и образцом (фиг. 11). Так как $\lambda \sim 10^3$ А, зазор e следует делать по возможности малым (обычно $e \approx 0{,}2$ *мм*, а $R \approx 4$ *мм*). На практике величина e известна недостаточно точно, так что описанный метод в основном служит для определения температурной зависимости глубины проникновения $\lambda(T)$. Другая, но в принципе аналогичная методика состоит в использовании микроволнового резонатора со сверхпроводящими стенками[2].

[1]) См. также [15]. — *Прим. ред.*

[2]) Этот последний метод, видимо, является наилучшим. Здесь уместно будет также заметить, что величина λ выше всюду появлялась в экспоненциальном законе убывания поля в толщу сверхпроводника. Между тем этот

Обсуждение

Проникновение поля в чистые металлы при абсолютном нуле

Возникает вопрос: можно ли с помощью экспериментально найденных значений λ проверить феноменологическое соотношение Пиппарда? Для чистых металлов при абсолютном нуле мы можем независимо вычислить

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)} \quad \text{и} \quad \lambda_L = \left(\frac{mc^2}{4\pi n e^2}\right)^{1/2}.$$

Определив значения v_F и n/m из измерений удельной теплоемкости, аномального скин-эффекта и т. д. на образце в нормальном состоянии, а значения $\Delta(0)$ из измерений тех же величин на образце в сверхпроводящем состоянии, мы можем теоретически предсказать величину λ (напомним, что $\lambda^3 = 0{,}62\lambda_L^2\xi_0$ для $\lambda_L \ll \xi_0$; при $\lambda_L \sim \xi_0$ формула несколько усложняется). В табл. 3 сравниваются теоретические и экспериментальные значения λ (экстраполированные к 0° К). Налицо качественное согласие, хотя без дополнительной информации довольно трудно определить ξ_0, исходя из значений λ. Подобные измерения не дают возможности уточнить вид соотношения (2.16) [1]).

Таблица 3

Значения λ и ξ_0 для некоторых металлов *

Металл	λ_L, Å	ξ_0, Å	$\lambda_{\text{теор}}$, Å	$\lambda_{\text{эксп}}$, Å
Al	157	16 000	530	490—515
Sn	355	2 300	560	510
Pb	370	830	480	390

* Данные взяты из работы [16].

В настоящее время разработаны и применяются более тонкие методы проверки теории; важнейшим из них является измерение проникновения магнитного поля сквозь пленки. В частности, полное

закон не всегда верен. Физическое же определение λ как эффективной длины, на которую проникает магнитный поток, всегда однозначно: $\phi = \int H\,dz = \lambda H_0$, где H_0 — поле на поверхности, а поток отнесен к единице длины периметра образца. — *Прим. ред.*

[1]) Количественное сопоставление данных, полученных из экспериментов с нормальным металлом и сверхпроводником, оказывается очень затруднительным, так как, например, такая величина, как эффективная масса электрона, очень анизотропна для нормального металла. — *Прим. ред.*

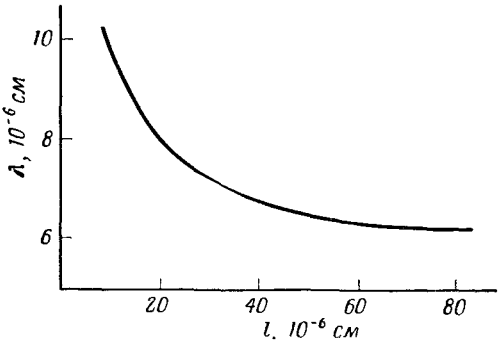
решение, полученное с помощью (2.16) для тонких пленок, указывает на то, что в случае $\xi_0 \gg \lambda$ поле может изменить знак, а отношение ρ может стать отрицательным. Экспериментально это явление наблюдалось Драигайдом и Зоммерхальдером [17, 18].

Обобщение на случай сплавов

Можно ожидать, что в том случае, когда длина свободного пробега электронов l уменьшается вследствие присутствия примесей, в выражении, связывающем ток в точке $\mathbf{r}$ и вектор-потенциал в точке $\mathbf{r}'$, появится затухающий множитель типа $\exp(-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/l)$. Таким образом, можно предположить, следуя Пиппарду [10, 11], что

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = C \int \frac{[\mathbf{A}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{R}]\mathbf{R}}{R^4} \exp\left[-R\left(\frac{1}{\xi_0}+\frac{1}{l}\right)\right] d\mathbf{r}'. \qquad (2.19)$$

Нормировочный множитель C предполагается не зависящим от l и равным своему значению $-3ne^2/4\pi mc\xi_0$ в чистом металле. Другими



Фиг. 12. Зависимость глубины проникновения λ от длины свободного пробега для сплавов SnIn (Пиппард [10]).

Результаты находятся в полном согласии с теорией того же автора [см. (2.21)].

словами, предполагается, что вклад в ток $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, вносимый точками $\mathbf{r}'$, соседними с точкой $\mathbf{r}$ ($|\mathbf{r}'-\mathbf{r}| \lesssim l$), не меняется при наличии примесей. С помощью этой гипотезы Пиппарду удалось объяснить результаты ряда опытов с разбавленными сплавами SnIn. Из фиг. 12 видно, что глубина проникновения λ растет с увеличением концентрации примесей — вывод, который удается разумно истолковать на основе выражения (2.19). Особый интерес представляет предельный случай $\lambda \gg l$, когда можно пренебречь изменениями $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ в (2.19). Выполняя интегрирование, получаем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = C\frac{4\pi}{3}\frac{1}{\xi_0^{-1}+l^{-1}}\mathbf{A}(\mathbf{r}). \qquad (2.20)$$

Это — уравнение лондоновского типа, но коэффициент отличается от его значения в чистом металле. Если, кроме того, $l \ll \xi_0$, то

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{ne^2}{mc}\frac{l}{\xi_0}\mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

откуда получаем следующее выражение для глубины проникновения:

$$\lambda = \lambda_L \left(\frac{\xi_0}{l}\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad l \ll \xi_0, \lambda. \tag{2.21}$$

В этой области глубина проникновения λ пропорциональна $l^{-1/2}$, т. е. квадратному корню из концентрации примесей.

Согласие между теорией и экспериментом для системы SnIn является блестящим подтверждением правильности предположений, сделанных Пиппардом. В гл. IV мы увидим, что эти результаты следуют из микроскопической теории.

Изменение глубины проникновения с температурой

До сих пор мы ограничивались рассмотрением случая $T = 0$. Для конечных температур ситуацию качественно можно описать следующим образом. Пиппардовское выражение (2.16) остается в силе, причем величина ξ_0 почти не зависит от температуры. Нормировочный коэффициент C является функцией температуры и обращается в нуль в точке перехода T_c. Непосредственно вблизи T_c коэффициент C является линейной функцией разности $T_c - T$. Универсальная теоретическая кривая для C, полученная с помощью микроскопической теории, приведена в гл. IV, § 5. Зная C, можно, пользуясь соотношением (2.20), вычислить λ [1]). Чтобы избежать громоздких математических выкладок, экспериментаторы часто прибегают к следующей эмпирической зависимости:

$$\lambda^2(T) = \lambda^2(0)\frac{T_c^4}{T_c^4 - T^4}. \tag{2.22}$$

Соотношение (2.22) хорошо согласуется с экспериментальными данными для олова и приводит к правильной температурной зависимости $\lambda \sim (T_c - T)^{-1/2}$ при $T \to T_c$. Следует, однако, подчеркнуть, что универсальный закон вида (2.22) *нельзя* безоговорочно применять ко всем сверхпроводникам из-за того, что в расчете λ используются два независимых параметра (например, ξ_0 и лондоновская глубина проникновения λ_L).

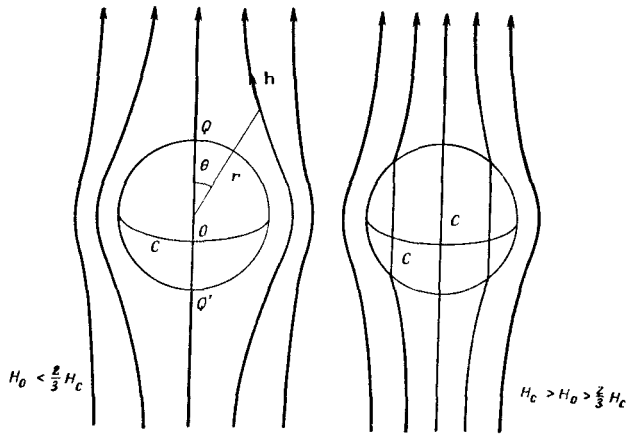
---

[1]) Это законно для сверхпроводников лондоновского типа. Для пиппардовских сверхпроводников см. (2.16). В этом случае вблизи T_c есть область, где $\lambda \sim (T_c - T)^{-1/3}$. — *Прим. ред.*

§ 3. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ОБРАЗЦОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ. ПРОМЕЖУТОЧНОЕ СОСТОЯНИЕ

Происхождение промежуточного состояния

Для определения критического поля H_c мы выше помещали цилиндрический образец в магнитное поле, параллельное оси цилиндра. Если пренебречь влиянием концов, то такая геометрия обеспечивает постоянство значения поля $\mathbf{h}$ на всей поверхности цилиндра.



Фиг. 13. Распределение магнитного поля вблизи сверхпроводящей сферы радиусом a.

При $H_0 < 2H_c/3$ (где H_0 — приложенное поле) эффект Мейсснера является полным: поле на экваторе (в любой точке на окружности C) равно $3H_0/2$, а на полюсах Q и Q' равно нулю. При $H_c > H_0 > 2H_c/3$ сфера находится в промежуточном состоянии.

Рассмотрим теперь менее тривиальный случай, например сверхпроводящую сферу радиусом a, помещенную в однородное внешнее магнитное поле H_0. Если поле H_0 мало, а именно меньше $2H_c/3$, то силовые линии вытесняются из образца, как изображено на фиг. 13. Распределение поля вне сферы определяется уравнениями

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0 \quad \text{и} \quad h \to H_0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{2.23}$$

где r — расстояние, отсчитываемое от центра сферы. Наконец, необходимо учесть эффект Мейсснера, т. е. то обстоятельство, что силовые линии не могут проникать внутрь сверхпроводящей сферы. Отсюда

следует, что нормальная компонента поля h_n должна исчезать на поверхности сферы

$$(h_n)_{r=a} = 0. \tag{2.24}$$

Соответствующее решение для внешней по отношению к образцу области имеет вид

$$\mathbf{h} = \mathbf{H}_0 + H_0 \frac{a^3}{2} \nabla \left(\frac{\cos\theta}{r^2} \right). \tag{2.25}$$

Компонента поля $\mathbf{h}$, параллельная поверхности образца, равна

$$(h_\theta)_{r=a} = \frac{3}{2} H_0 \sin\theta. \tag{2.26}$$

В точках Q и Q' поле h равно нулю; на экваторе сферы ($\theta = \pi/2$) тангенциальная составляющая максимальна и равна $3H_0/2$. Величина поля в остальных точках поверхности лежит между этими предельными значениями. Когда поле H_0 достигает величины $2H_c/3$, поле на экваторе становится равным H_c. Следовательно, для полей $H_0 > 2H_c/3$ некоторые области сферы переходят в нормальное состояние. Однако, поскольку в остальных местах $H_0 < H_c$, сверхпроводимость должна сохраниться. (Если бы сфера перешла в нормальное состояние полностью, то поле в любой точке сферы стало бы равным H_0. В силу условия $H_0 < H_c$ это состояние будет неустойчивым, сверхпроводимость должна вновь появиться.) Таким образом, для значений поля, лежащих в интервале

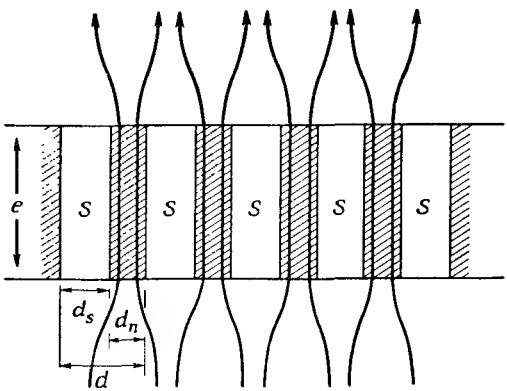
$$\frac{2}{3} H_c < H_0 < H_c, \tag{2.27}$$

нормальные и сверхпроводящие области должны сосуществовать. Такое состояние называется *промежуточным*.

Отметим, что область полей H_0, при которых будет наблюдаться равновесие между двумя фазами, определяется неравенством (2.27) лишь для образцов сферической формы. Если вместо сферы в поле поместить вытянутый (сплюснутый) эллипсоид с осью вращения, параллельной направлению поля H_0, то на экваторе поле будет меньше (больше) отличаться от H_0 и область существования промежуточного состояния будет иной. В частности, если мы рассмотрим тонкую металлическую пластину в поле, перпендикулярном ее плоскости, то промежуточное состояние будет существовать во всей области полей $0 < H_0 < H_c$. (Если бы в отличном от нуля поле H_0 пластина оставалась полностью сверхпроводящей, то поле на краю пластины было бы очень большим, т. е. больше H_c, что неизбежно привело бы к появлению нормальных областей.)

Рассмотрим подробнее случай пластины толщиной e. Распределение нормальных (N) и сверхпроводящих (S) областей представлено

на фиг. 14: области N и S образуют слои, перпендикулярные плоскости чертежа. Силовые линии проходят только через области N. Чтобы обеспечить равновесие, поле h на плоскостях раздела областей N и S должно быть равно H_c. В областях N поле h параллельно оси z, т. е. $\operatorname{div}\mathbf{h} = \operatorname{rot}\mathbf{h} = 0$. Следовательно, в областях N поле h постоянно и равно H_c, а в S-областях $h = 0$. Доля объема, занятая S-областями $\rho = d_s/(d_s + d_n)$, для этой простой конфигурации определяется непосредственно из условия сохранения потока. Вдали от



Фиг. 14. Распределение силовых линий в пластине в поле, перпендикулярном ее плоскости.

При любом значении поля $H_0 < H_c$ образец находится в промежуточном состоянии, т. е. обладает ламинарной структурой из чередующихся нормальных и сверхпроводящих областей (не учитываются небольшие искажения общей картины вблизи краев пластины).

пленки поле однородно, $h = H_0$, и поток равен SH_0 (где S — площадь поверхности пленки); в самой пленке поток проходит через площадь $S(1-\rho)$, а поле равно H_c. Следовательно,

$$SH_0 = S(1-\rho)H_c,$$
$$\rho = 1 - \frac{H_0}{H_c}. \qquad (2.28)$$

В результате наблюдений установлено, что толщины слоев d_s и d_n для макроскопических образцов ($e \gg \xi_0$) существенно меньше размеров образца. (Эксперименты, на основании которых сделан этот важный вывод, описаны ниже.) Поэтому при решении многих задач можно полностью игнорировать микроскопическую структуру чередующихся слоев и оперировать лишь относительным объемом S-областей ρ.

Для пластины вычисление коэффициента ρ представляет собой довольно простую задачу. Для образцов более сложной формы опре-

деление ρ и макроскопического среднего значения поля в любой точке требует более общего анализа. Эта задача была решена Пайерлсом. Ниже мы приведем этот анализ, а затем применим результаты к решению некоторых типичных задач.

Некоторые термодинамические соотношения

Дадим теперь определение некоторых макроскопических величин (например, индукции $\mathbf{B}$, напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и т. д.), удобных при описании тех случаев, когда имеется частичное проникновение силовых линий в образец (например, промежуточного состояния). Другие приложения рассматриваются в гл. III в связи со специальными задачами для сверхпроводников второго рода.

Определение свободной энергии

Рассмотрим систему, состоящую из образца и внешних объектов (катушек, генераторов и т. д.). Определим свободную энергию следующим образом. Во-первых, запишем *энергию* электронов в образце

$$U=\sum_i\left[\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}_i-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+V_i\right]+\sum_{i>j}V_{ij}, \tag{2.29}$$

где $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал, связанный с полем $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ соотношением $\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{h}$, V_{ij} — энергия электрон-электронного взаимодействия, V_i — одноэлектронный потенциал. Во-вторых, добавим к этой энергии *энтропийный член* $-TS$. Оба вклада можно представить в виде интеграла по объему образца

$$U-TS=\int\limits_{\text{Образец}}F_s\,d\mathbf{r}. \tag{2.30}$$

В-третьих, включим в рассмотрение *энергию магнитного поля* $\int(h^2/8\pi)\,d\mathbf{r}$. Сумма этих трех вкладов носит название свободной энергии

$$\mathscr{F}=\int\limits_{\text{Образец}}F_s\,d\mathbf{r}+\int\limits_{\text{Все пространство}}\frac{h^2}{8\pi}\,d\mathbf{r}. \tag{2.31}$$

Определение индукции

Мы часто будем сталкиваться с ситуациями, в которых микроскопическое поле $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ в образце сильно меняется в пространстве на расстояниях Δx, гораздо меньших, чем размеры образца. (Примером может служить промежуточное состояние, изображенное на фиг. 14.) В этих случаях удобно ввести вектор $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, определяющий среднее значение поля $\mathbf{h}$ в окрестности точки $\mathbf{r}$ в области, размеры которой малы по сравнению с размерами образца, но велики в сравнении с Δx. По определению,

$$\mathbf{B}=\overline{\mathbf{h}} \tag{2.32}$$

внутри образца и $\mathbf{B} = \mathbf{h}$ снаружи. Микроскопическое поле $\mathbf{h}$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, \end{aligned} \tag{2.33}$$

где $\mathbf{j}$ — локальная плотность тока. Отсюда находим уравнения для $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \tag{2.34}$$

где $\bar{\mathbf{j}}$ — макроскопическая плотность тока.

Определение напряженности магнитного поля H

Предположим, что при изменении тока в катушках распределение поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ несколько изменилось. В соответствии с этим величина $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в каждой точке $\mathbf{r}$ изменится на небольшую величину $\delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$. В первом порядке по $\delta\mathbf{B}$ наиболее общее выражение для изменения свободной энергии $\delta\mathcal{F}$ имеет вид

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{B}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \tag{2.35}$$

где коэффициент $1/4\pi$ введен для удобства; $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ — некоторая функция координат, которую мы будем называть магнитным полем в точке $\mathbf{r}$ [1]). Вне образца должны выполняться соотношения

$$\frac{\mathbf{h} \cdot \delta\mathbf{h}}{4\pi} = \frac{\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}}{4\pi}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}. \tag{2.36}$$

Поэтому вне образца $\mathbf{h} = \mathbf{H} = \mathbf{B}$. Соотношение (2.35) определяет величину $\mathbf{H}$ довольно формально. Чтобы почувствовать ее физический смысл, рассмотрим случай, когда *отсутствуют внешние токи, втекающие в образец*. Тогда плотность тока можно записать в виде

$$\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{j}}_s + \mathbf{j}_e, \tag{2.37}$$

где $\bar{\mathbf{j}}_s(\mathbf{r})$ — средняя плотность сверхпроводящего тока в точке $\mathbf{r}$ образца (вне образца, по определению, $\mathbf{j}_s = 0$); $\mathbf{j}_e$ — ток в катушках, генераторах и т. д. Поскольку токи не втекают в образец, ясно видно различие между $\mathbf{j}_e$ и $\bar{\mathbf{j}}_s$ (в образце $\mathbf{j}_e = 0$). Тогда имеем просто

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e. \tag{2.38}$$

[1]) Отметим, что в случае полного эффекта Мейсснера ($B = 0$) поле $\mathbf{H}$ не определено.

Доказательство уравнения (2.38). Если индукция $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ испытывает изменение $\delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$ за время δt, то возникает электрическое поле $\mathbf{E}$ в соответствии с уравнением

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t}.$$

Работа, совершенная электрическим полем $\mathbf{E}$ над внешними токами, равна $\delta t \int \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E}\, d\mathbf{r}$, тогда как работа, совершаемая внешними токами, равна

$$\delta W = -\delta t \int \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E} d\mathbf{r}. \tag{2.39}$$

Из термодинамики известно, что для обратимого процесса при постоянной температуре должно выполняться равенство $\delta W = \delta\mathcal{F}$. Сравним выражения (2.39) и (2.35). Для этой цели преобразуем последнее следующим образом:

$$\delta\mathcal{F} = \delta t \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\cdot\frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t}\, d\mathbf{r} = -\delta t\frac{c}{4\pi}\int \mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}\, d\mathbf{r} =$$

$$= -\delta t\frac{c}{4\pi}\int \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}\, d\mathbf{r} - \frac{c\,\delta t}{4\pi}\int (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\sigma. \tag{2.40}$$

Последний из написанных интегралов берется по поверхности, охватывающей всю систему. Он равен излучаемой системой энергии, которой для медленных, т. е. обратимых, процессов можно пренебречь. Сравнивая (2.40) и (2.39), мы убеждаемся в справедливости (2.38).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ дают вклад все токи [см. (2.34)]; напротив, в $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ [см. (2.38)] вносит вклад лишь ток $\mathbf{j}_e$. Поэтому появляется искушение считать, что $\mathbf{H}$ представляет собой поле, которое существовало бы в отсутствие образца (при условии, что ток в катушках поддерживается постоянным). Это правильно для цилиндрической геометрии, показанной на фиг. 7, но в общем случае неверно. Рассмотрим, например, сферический образец (см. фиг. 13). Здесь силовые линии искажаются из-за присутствия образца, что приводит к изменению $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ (но не $\operatorname{rot}\mathbf{H}$).

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ означает, как обычно, что нормальная компонента $\mathbf{B}_n$ непрерывна на поверхности образца. Наоборот, тангенциальная компонента $\mathbf{B}_t$, вообще говоря, терпит разрыв, поскольку в $\operatorname{rot}\mathbf{B}$ дает вклад сверхпроводящий ток. Обычно он локализован на поверхности образца (точнее, в слое толщиной λ вблизи поверхности). Если обозначить через $\mathbf{I}_s$ ток, приходящийся на 1 *см* длины поверхности, то, интегрируя уравнение (2.34), находим

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}_s, \tag{2.41}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный к поверхности и направленный наружу.

Термодинамический потенциал для фиксированных значений T и $\mathbf{j}_e$

Если изменяется как поле, так и температура, то вариация свободной энергии (2.35) запишется в виде

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}\,d\mathbf{r} - S\,\delta T, \tag{2.42}$$

где S — энтропия. При фиксированных значениях индукции $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (в каждой точке $\mathbf{r}$) и температуры T состоянию равновесия соответствует минимум функции $\mathcal{F}$. Однако довольно часто этот случай интереса не представляет. Во время эксперимента обычно поддерживаются постоянными температура T и токи в катушках $\mathbf{j}_e$. Построим термодинамический потенциал, пригодный в такой ситуации. Введем определение

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,d\mathbf{r}. \tag{2.43}$$

Тогда

$$\delta\mathcal{G} = -\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H}\,d\mathbf{r} - S\,\delta T. \tag{2.44}$$

Так как $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, можно положить $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{A}}$ (где $\bar{\mathbf{A}}$ — „макроскопический“ вектор-потенциал), после чего, интегрируя по частям, получим

$$S\,\delta T + \delta\mathcal{G} = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{rot}\bar{\mathbf{A}}\cdot\delta\mathbf{H}\,d\mathbf{r} = \\ = \frac{1}{4\pi}\int \bar{\mathbf{A}}\cdot\operatorname{rot}\delta\mathbf{H}\,d\mathbf{r} = \frac{1}{c}\int \bar{\mathbf{A}}\cdot\delta\mathbf{j}_e\,d\mathbf{r}. \tag{2.45}$$

Таким образом, при заданных T и $\mathbf{j}_e$ имеем $\delta\mathcal{G} = 0$, т. е. состояние равновесия соответствует минимуму потенциала $\mathcal{G}$. На практике обычно сначала находят $\mathcal{F}$ и $\mathbf{B}$ для микроскопической модели, а затем строят потенциал $\mathcal{G}$, минимизируя который получают условие равновесия. Это условие играет такую же роль, как соотношение $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ в случае магнитной среды.

Связь между B и H в промежуточном состоянии [19, 20]

Чтобы получить связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, вычислим потенциал Гиббса $G\,d\mathbf{r}$ для элемента объема образца, находящегося в промежуточном состоянии [доля ρ объема $d\mathbf{r}$ находится в сверхпроводящем (S) состоянии, а $(1-\rho)$ — в нормальном (N)]. В нормальном состоянии микроскопическое поле $\mathbf{h}$ имеет определенное значение $\mathbf{h}_n$, а в сверхпроводящем оно равно нулю. Мы покажем, что условие минимума потенциала $\mathcal{G}$ приводит к равенству $h_n = H_c$. В силу определения коэффициента ρ имеем

$$B = (1-\rho)\,h_n + \rho\cdot 0 = (1-\rho)\,h_n. \tag{2.46}$$

Плотность свободной энергии равна

$$F = F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + (1-\rho)\frac{h_n^2}{8\pi}; \tag{2.47}$$

здесь второй член представляет собой энергию конденсации в сверхпроводящих областях, а третий — магнитную энергию. Мы пренебрегли энергией поверхности раздела нормальных и сверхпроводящих областей, а также членами, учитывающими искажение силовых линий вблизи поверхности образца (для макроскопических тел эти поверхностные члены пренебрежимо малы). В переменных ρ и $\mathbf{B}$ свободная энергия F принимает вид

$$F = F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi(1-\rho)}. \tag{2.48}$$

Обратимся теперь к термодинамическому потенциалу G

$$G(B,\ \rho) = F - \frac{BH}{4\pi} = F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi(1-\rho)} - \frac{BH}{4\pi} \tag{2.49}$$

и будем его минимизировать по переменным ρ и B.

1. Минимизация по ρ дает

$$|B| = H_c(1-\rho). \tag{2.50}$$

Из сравнения соотношений (2.50) и (2.46) следует, что поле в нормальной области равно $h_n = H_c$. (Это свойство мы использовали ранее в связи с примером на стр. 35.)

2. В результате минимизации по B получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial B} &= 0, \\ B &= H(1-\rho). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Отсюда можно заключить, что, во-первых, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ параллельны и, во-вторых, величина поля $\mathbf{H}$ постоянна и равна H_c во всем объеме образца. Это условие эквивалентно соотношению $B = \mu H$ для парамагнитной среды. Единственное отличие состоит в том, что полученная зависимость $B(H)$ носит нелинейный характер. Распределение поля в образце можно найти, решив систему уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{2.52}$$

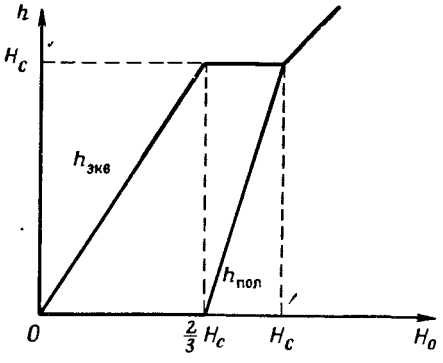
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \tag{2.53}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}\frac{H_c}{|\mathbf{B}|} \tag{2.54}$$

при обычном условии непрерывности B_n и H_t на поверхности образца. Уравнение (2.53) отражает сделанное раньше предположение об отсутствии токов, втекающих в образец [см. (2.38)].

Применения

Как и прежде, ограничимся рассмотрением наиболее распространенного случая, когда образец не связан непосредственно с генератором тока. Тогда внутри образца силовые линии будут *прямыми*. Приведем принадлежащее Лондону доказательство этого утверждения:



Ф и г. 15. Поле на экваторе и полюсах сверхпроводящей сферы.

Для $0 < H_0 < 2H_c/3$ имеет место полный эффект Мейсснера: поле на полюсах равно нулю. Для $2H_c/3 < H_0 < H_c$ сфера находится в промежуточном состоянии; при увеличении H_0 поле на экваторе остается неизменным и равным H_c, тогда как поле на полюсах линейно растет от нуля до H_c.

$$H^2 = H_c^2,$$

$$0 = \nabla(H^2) = 2(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} + 2\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}. \tag{2.55}$$

В самом образце $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$, так что $(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} = 0$. Вектор $\mathbf{H}$ не меняется вдоль силовой линии, следовательно, последняя представляет собой прямую.

Пример. Вернемся к рассмотрению сферического образца, помещенного во внешнее поле H_0, причем $2H_c/3 < H_0 < H_c$. Решение системы уравнений (2.52) — (2.54) в этом случае строится следующим образом.

Будем считать, что внутри сферы ($r < a$) векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ параллельны оси z и постоянны по величине ($H = H_c$, а B — неизвестная пока величина, которую мы обозначим через B_0). С другой стороны, во внешней области

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} = \mathbf{H}_0 - H_1\frac{a^3}{2}\nabla\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right), \tag{2.56}$$

где H_1 — вторая константа, которую нам предстоит определить. Из условия непрерывности на поверхности тангенциальной составляющей H_t получаем

$$\left(H_0 + \frac{H_1}{2}\right)\sin\theta = H_c\sin\theta. \tag{2.57}$$

Аналогично из условия непрерывности нормальной составляющей B_n имеем

$$(H_0 - H_1)\cos\theta = B_0\cos\theta. \tag{2.58}$$

Сравнивая эти два уравнения, находим

$$\begin{aligned} B_0 &= 3H_0 - 2H_c, \\ H_1 &= 2(H_c - H_0). \end{aligned} \tag{2.59}$$

ВЫВОДЫ

1. Всегда можно построить решение, отвечающее постоянному значению индукции B, а следовательно, и доли сверхпроводящих областей $\rho = 1 - B_0/H_c$ везде внутри сферы.

2. Индукция B_0 является линейной функцией приложенного поля H_0. На опыте индукцию B_0 можно измерить, помещая магнитные пробники вблизи полюсов Q и Q' сферы. Из условия непрерывности B_n следует, что поле вне сферы непосредственно у ее полюсов Q и Q' равно B_0. Аналогично измерение поля H_c, как ясно из условия непрерывности для H_t, должно производиться с помощью пробника, расположенного на экваторе сферы. Форма полученных таким путем экспериментальных диаграмм для чистых образцов весьма близка к теоретической (фиг. 15).

Критический ток в сверхпроводящей проволоке

Проволока радиусом a присоединена к полюсам генератора, который создает в ней ток I. Поле на поверхности проволоки равно $H(a) = 2I/ca$. Если $H(a) < H_c$, то проволока может находиться полностью в сверхпроводящем состоянии. Это условие определяет критический ток

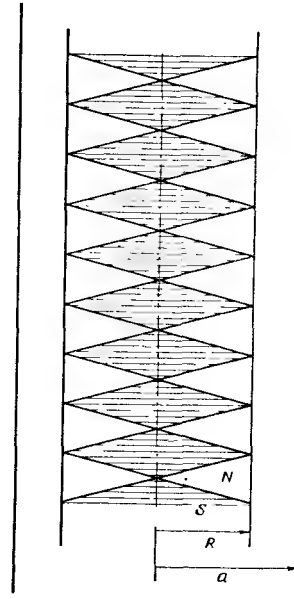
$$I_c = \frac{ca}{2} H_c. \qquad (2.60)$$

Когда ток I становится больше, чем I_c, то $H(a) > H_c$ и проволока вблизи поверхности должна перейти в нормальное состояние. Однако полностью она не может стать нормальной, поскольку в этом случае ток I распределился бы равномерно по всему сечению проволоки и поле h стало бы чрезвычайно малым в центральной ее части. Следовательно, проволока должна (по крайней мере частично) остаться сверхпроводящей. Таким образом, можно прийти к выводу, что внешняя область проволоки ($R < r < a$) является нормальной, а внутренняя ($0 < r < R$) находится в сверхпроводящем или промежуточном состоянии. Во внешней области $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, а на границе $H(R) = H_c$. Отсюда находим выражение для тока I_1, текущего по внутреннему сечению,

$$H(R) = H_c = \frac{2I_1}{cR}, \qquad (2.61)$$

$$I_1 = \frac{cRH_c}{2} = I_c \frac{R}{a} < I_c, \qquad (2.62)$$

т. е. $I_1 < I_c < I$. Остающийся ток $I - I_1$ должен течь по внешней части сечения. Так как эта область является нормальной, должно возникать электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное вдоль оси проволоки и имеющее постоянное значение по всей ее длине в силу условия $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$.



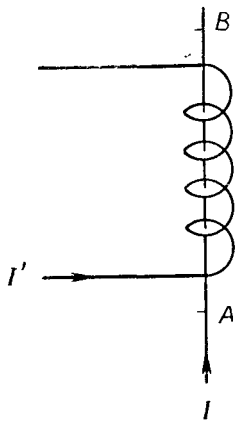
Фиг. 16. Картина доменной структуры в сверхпроводящей проволоке радиусом a, несущей ток $I > I_c$.

Поверхностный слой находится в нормальном состоянии, а сердцевина радиусом R — в промежуточном состоянии. Радиус поверхности раздела R определяется уравнением $H(R) = H_c$.

Приведенное рассуждение показывает, что внутренняя область проволоки не может быть полностью сверхпроводящей, поскольку в противном случае она накоротко замкнула бы полюсы генератора. Таким образом, внутренняя область должна находиться в промежуточном состоянии с N- и S-слоями, расположенными перпендикулярно оси цилиндра (фиг. 16). Детальное обсуждение возникающей картины можно найти в книге Лондона [21], § 20.

Принцип криотрона

Криотрон — это управляющее устройство, изобретенное Баком [22] в 1956 г.; принцип действия криотрона поясняется схемой на фиг. 17. Управляющий ток I' создает поле $H' = 4\pi NI'/cL$ в соленоиде (N — число витков, а L — длина катушки). Сверхпроводящая проволока AB диаметром $2a$ помещена в соленоид, создающий критическое поле H_c. При $H' < H_c$ сопротивление проволоки равно нулю; при $H' > H_c$ сопротивление проволоки конечно. Следовательно, током I, проходящим по проволоке AB, можно управлять с помощью тока I'. Минимальный ток I', необходимый для того чтобы перевести проволоку AB в нормальное состояние, равен



Фиг. 17. Принципиальная схема криотрона.

Током в сверхпроводящей проволоке AB можно управлять с помощью тока соленоида I'. Когда поле соленоида становится равным H_c, проволочка переходит в нормальное состояние.

$$I'_m = \frac{cL}{4\pi N} H_c. \qquad (2.63)$$

Вместе с тем ток I не может быть слишком большим, так как в противном случае проволока AB перейдет в промежуточное состояние. Как мы только что видели,

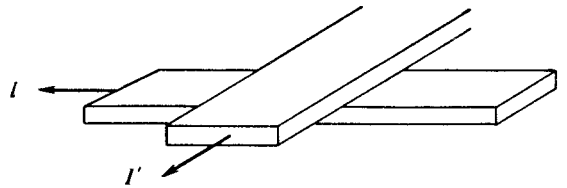
$$I \leqslant I_c = \frac{caH_c}{2}. \qquad (2.64)$$

Усиление криотрона по току равно

$$G = \frac{I_c}{I'_m} = 2\pi N \frac{a}{L}. \qquad (2.65)$$

В первом эксперименте Бака управляющая катушка была сделана из ниобиевой проволоки диаметром $\sim 0{,}1$ *мм* (ниобий — сверхпроводник с высоким значением критического поля ~ 2000 *гс*). Танталовая проволока AB диаметром $2a = 0{,}2$ *мм* имела критическое поле $H_c \sim 100$ *гс* при 4,2° К. Для катушки, состоящей всего из одного витка, это соответствует значениям $Na/L \sim 1$ и $G \sim 6$. Обычно нецелесообразно увеличивать число витков N, поскольку это приводит к возрастанию индуктивности катушки и в конечном счете к увели-

чению постоянной времени τ криотрона. (У одновитковой катушки $\tau \gtrsim 10^{-5}$ *сек.*) На практике постоянная времени может быть значительно снижена путем замены устройства, показанного на фиг. 17, двумя тонкими скрещенными металлическими пленками (фиг. 18),



Фиг. 18. Криотрон с малой постоянной времени.
Две скрещенные металлические пленки разделены тонким слоем диэлектрика.

разделенными изолирующим слоем толщиной приблизительно 1000 Å Так как коэффициент самоиндукции пропорционален толщине этого слоя, то его величина оказывается чрезвычайно малой, в соответствии с чем постоянная времени снижается до $\sim 10^{-8} - 10^{-9}$ *сек.*

Микроскопическая структура промежуточного состояния [23]

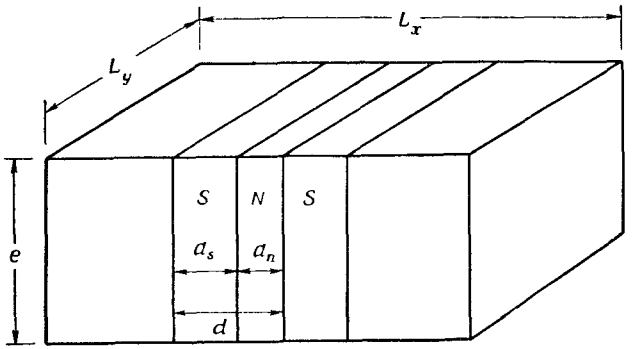
Пусть пластина толщиной e с поперечными размерами L_x, L_y (большими по сравнению с толщиной) помещена в перпендикулярное ее плоскости поле H_0, в результате чего в ней образуются нормальные и сверхпроводящие области. *Предположим*, что эти области имеют форму слоев, как показано на фиг. 19. Такая конфигурация довольно часто наблюдается на опыте. Мы хотим определить толщины d_n и d_s нормальных и сверхпроводящих областей, а также период доменной структуры $d_n + d_s = d$.

Чтобы решить эту задачу, запишем выражение для свободной энергии $\mathcal{F}$ и будем минимизировать его относительно d_n и d_s (или эквивалентных параметров) при заданном значении поля H_0. Задание H_0 означает, что фиксирован поток через пластину, т. е. подходящим термодинамическим потенциалом является $\mathcal{F}$, а не $\mathcal{G}$.

В нулевом приближении мы полностью пренебрежем поверхностной энергией и будем считать области S и N идеально плоскими слоями. Тогда свободная энергия просто равна

$$\mathcal{F}_{\text{макр}} = -\frac{H_c^2}{8\pi} L_x L_y e \frac{d_s}{d} + \frac{H_0^2}{8\pi} L_x L_y e \frac{d_n}{d_n}. \qquad (2.66)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой энергию конденсации в областях S, а второе — энергию магнитного поля $h^2/8\pi$ в областях N, где $h = H_0(d/d_n)$, как следует из условия сохранения потока.



Фиг. 19. Микроскопическая структура из нормальных и сверхпроводящих областей в пластине в промежуточном состоянии.

Домены образуют ламинарную структуру с периодом $d \sim \sqrt{e\delta}$ (e — толщина пластины, δ — толщина границы раздела).

Чтобы перейти к приближению первого порядка, необходимо учесть три типа вкладов в свободную энергию.

1 Создание границы между областями S и N сопряжено с затратой некоторой поверхностной энергии γ (отнесенной на 1 $см^2$ площади). Из соображений размерности величину γ удобно записать в виде

$$\gamma = \frac{H_c^2}{8\pi}\delta, \tag{2.67}$$

где длина δ порядка $10^3 - 10^4$ А. Соответствующий вклад в энергию $\mathcal{F}$ равен

$$\gamma e L_y \times (\text{Число границ}) = \frac{H_c^2}{8\pi}\delta e L_y \frac{2L_x}{d}. \tag{2.68}$$

2. Силовые линии „расходятся" вблизи поверхности образца; соответственно сверхпроводящие домены становятся тоньше на концах. На этом в объеме $\sim d_s^2 L_y$ для каждой области S проигрывается определенная энергия. Это дает вклад

$$\frac{H_c^2}{8\pi} d_s^2 L_y \frac{L_x}{d} U_0(\rho_s), \tag{2.69}$$

где $\rho_s = d_s/d$, а $U_0(\rho_s)$ — безразмерная функция, которую можно вычислить, зная точную форму „тонких" областей.

3. Энергия магнитного поля $\int (h^2/8\pi)\,d\mathbf{r}$ также изменяется вблизи поверхности, что дает член вида

$$\frac{H_0^2}{8\pi} d_s^2 L_y \frac{L_x}{d} V_0(\rho_s), \tag{2.70}$$

где $V_0(\rho_s)$ — другая безразмерная функция. (Расчет U_0 и V_0 описан в книге Ландау и Лифшица [8] [1]), § 44.)

Выберем в качестве независимых переменных ρ_s и d. Если сначала произвести минимизацию свободной энергии по переменной ρ_s, то для макроскопического образца ($e \gg \xi_0$) найдем

$$1 - \rho_s = \frac{H_0}{H_c}. \tag{2.71}$$

Это уравнение, как мы уже знаем, выражает тот факт, что поле в нормальной области равно H_c. Теперь минимизируем функцию $\mathcal{F}$ по d. Зависящий от d вклад в функцию $\mathcal{F}$ дают три только что выписанных дополнительных члена

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{макр}} + \frac{H_c^2}{8\pi} eL_xL_y \left\{ \frac{2\delta}{d} + \left[\rho_s^2 U_0 + \rho_s^2 (1-\rho_s)^2 V_0\right] \frac{d}{e} \right\}. \tag{2.72}$$

Значение d, приводящее к минимуму $\mathcal{F}$, равно

$$d = \left[\frac{\delta e}{\varphi(\rho_s)}\right]^{1/2}, \tag{2.73}$$

где $\varphi = 0{,}5\left[\rho_s^2 U_0 + \rho_s^2 (1-\rho_s)^2 V_0\right]$. В типичном случае, когда $H_0/H_c \sim 0{,}7$, $\varphi \sim 10^{-2}$, имеем $d \sim 10\sqrt{\delta e}$. Взяв $e = 1$ *см*, $\delta = 3000$ Å, получаем, что $d \approx 0{,}6$ *мм*. Вблизи краев ($\rho_s \to 0$ или $\rho_s \to 1$) $\varphi \to 0$, а величина d соответственно становится больше. Для наблюдения доменной структуры используется ряд различных методов [2]).

1. Метод, примененный Мешковским и Шальниковым [25] в 1947 г., состоит в измерении сопротивления тонкой висмутовой проволочки при передвижении ее вдоль поверхности исследуемого образца. Сопротивление проволочки сильно зависит от величины магнитного поля и поэтому изменяется от больших значений вблизи областей N до малых в окрестности областей S.

2. Порошковый метод [26—29]. На поверхность образца наносится слой порошка ниобия. Вследствие большой величины критического поля ниобия (~ 2000 *гс*) зерна порошка всегда остаются

---

[1]) Подробный расчет дан в работе [24]. — *Прим. ред.*

[2]) См. примечание на стр. 29. — *Прим. ред.*

в сверхпроводящем (т. е. диамагнитном) состоянии, поэтому они, стремясь избежать силовых линий, собираются вблизи областей S.

3. Оптический метод [30]. Образец покрывают тонким слоем цериевого стекла (толщиной $\sim 0{,}1$ *мм*), в котором наблюдается сильно выраженный эффект Фарадея. Через стекло в направлении магнитного поля $\mathbf{H}_0$, перпендикулярного поверхности образца, пропускают поляризованный свет. При прохождении света через стекло плоскость поляризации поворачивается на угол θ. Затем свет отражается от поверхности образца, в результате полный угол поворота равен 2θ. Так как, вообще говоря, угол θ пропорционален величине поля ($\theta \approx 0{,}02°$ *мм*$^{-1} \cdot$ *гс*$^{-1}$), то при наблюдении образца сквозь скрещенную систему анализатора и поляризатора области N, где $h \neq 0$, оказываются светлыми. В конечном счете эти измерения позволяют определить энергию границы, т. е. длину δ.

Задача. Найти поправки к величине критического поля пластины, обусловленные конечностью ее толщины e.

Р е ш е н и е. Минимизируя выражение для свободной энергии относительно d при заданных значениях приведенного поля $h_r = H_0/H_c$ и $\rho_s = d_s/d$, находим

$$\mathcal{F} = \frac{H_c^2}{8\pi} eL_xL_y\left[-\rho_s + \frac{h_r^2}{1-\rho_s} + 4\left(\frac{\delta}{e}\right)^{1/2}\varphi^{1/2}\right],$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\rho_s^2\left[U_0(\rho_s) + h_r^2 V_0(\rho_s)\right].$$

В интересующей нас области h_r близко к 1, а ρ_s — к нулю, тогда для φ можно написать

$$\varphi \approx \theta^2\rho_s^2,$$

где $\theta^2 = 0{,}5\,|\,U_0(0) + V_0(0)\,| = \ln 2/\pi = 0{,}22$. (Это численное значение получено в вышеупомянутом расчете Ландау и Лифшица.) Далее, минимизируя $\mathcal{F}$ относительно ρ_s, получаем условие

$$-1 + \left(\frac{h_r}{1-\rho_s}\right)^2 + 4\theta\left(\frac{\delta}{e}\right)^{1/2} = 0.$$

Поле достигает критического значения для пластины в том случае, когда величина $\mathcal{F}$ становится равной свободной энергии нормального состояния $\left(H_c^2/8\pi\right)eL_xL_y$. Отсюда получаем еще одно условие

$$\rho_s\left(\frac{h_r^2}{1-\rho_s} - 1\right) + 4\theta\left(\frac{\delta}{e}\right)^{1/2}\rho_s = 0.$$

Оба условия выполняются одновременно, если

$$\rho_s = 0,$$

$$1 - h_r^2 = 4\theta\left(\frac{\delta}{e}\right)^{1/2},$$

$$H_0 \approx H_c\left[1 - 2\theta\left(\frac{\delta}{e}\right)^{1/2}\right].$$

При $e = 1$ *мм* и $\delta = 10^4$ Å уменьшение критического поля составляет 3%. Подобные отклонения от макроскопической теории имеют место для любой геометрии. Это обстоятельство весьма часто играет важную роль при обсуждении экспериментальных данных для сверхпроводников первого рода.

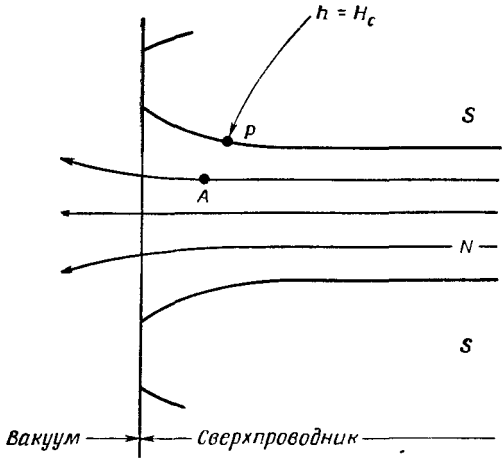
Парадокс

Если внимательно посмотреть на доменную структуру, изображенную на фиг. 20, *а*, то легко заметить, что в определенных точках области N, как, скажем, в точке A, силовые линии „раздвигаются". Поэтому в таких точках величина поля h значительно меньше, чем, например, поле $h(P)$, в точке P (находящейся на границе), т. е. ниже величины H_c. На первый взгляд, это может вызвать беспокойство, поскольку, казалось бы, область вблизи точки A должна вновь перейти в сверхпроводящее состояние. Это осложнение было проанализировано Ландау [31], который пришел к выводу, что нормальные области должны испытывать „ветвление" (фиг. 20, *б*), возможно, до столь мелкого масштаба, что доменная структура становится ненаблюдаемой. Фактически, однако, довольно часто *наблюдается* простая доменная структура. В чистых образцах с размерами ~ 1 *см* „ветвления" вообще не происходит. Это связано с уменьшением величины критического поля в точке A до величины, меньшей H_c, вследствие эффекта, аналогичного рассмотренному в предыдущей задаче. Отличие состоит лишь в величине эффекта. Теперь роль характерного размера вместо e играет d и поэтому эффект велик. Следовательно, окрестность точки A становится нормальной уже в довольно слабых полях.

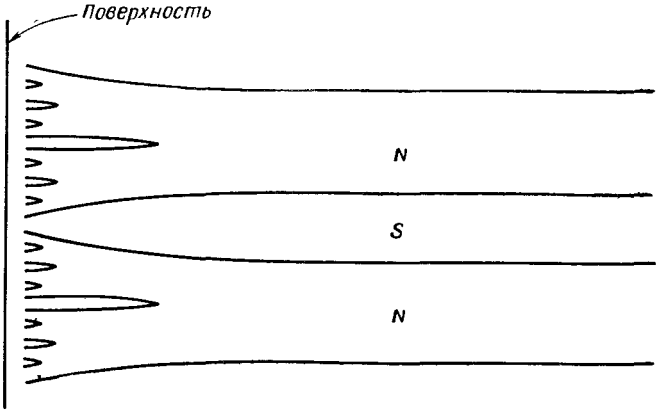
Если бы мы располагали сверхпроводником с толщиной $e \sim 1$ *км* ($d \sim 1$ *см*), то можно было бы применить к нему макроскопическое рассмотрение вблизи точки P. В этом случае можно было бы обнаружить ветвление. Отсюда видно, что разветвленная модель не является ошибочной; она просто непригодна для описания образцов обычных размеров. (Другой способ создать условия, благоприятные для возникновения ветвления, состоит не в увеличении e, а в уменьшении δ; этого можно добиться путем выбора подходящего сплава.)

Природа поверхностной энергии

Обсудим качественно два предельных случая. 1. $\xi_0 \gg \lambda$. В предыдущем макроскопическом рассмотрении предполагалось наличие резкой границы между нормальной и сверхпроводящей областями (для определенности будем считать, что эта граница лежит в плоскости yz, причем поле направлено вдоль оси z, а области N соответствуют значения $x < 0$). В области N термодинамический потенциал уменьшается за счет „магнитного" члена $H_c^2/8\pi - H_c^2/4\pi$ [см. (2.49)], тогда как в области S значение $\mathcal{G}$ понижается за счет энергии конденсации $-H_c^2/8\pi$. Что же происходит при микроскопическом рассмотрении? Если величина λ мала, то предположение о том, что поле скачком изменяется на плоскости $x = 0$, остается в силе.



а



б

Фиг. 20. Картина доменной структуры вблизи поверхности образца.

а — неразветвленная модель. Отметим, что $h(A) < h(P) = H_c$; это показано с помощью различной кривизны силовых линий. Имеется также несколько небольших нормальных областей вблизи краев, где $h < H_c$.

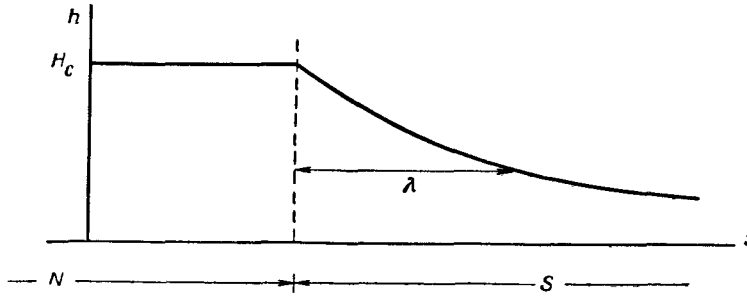
б — разветвленная модель Ландау. Ветвление необходимо, чтобы условие $h > H_c$ выполнялось всюду в нормальных областях. Фактически, однако, ветвления не происходит, так как условие $h > H_c$ применимо к нормальным областям макроскопических размеров. Для малых областей вблизи поверхности критические поля значительно меньше H_c, так что справедлива простая неразветвленная модель.

Новым здесь является то обстоятельство, что в S-области ($x > 0$) сверхпроводимость „портится" на расстояниях порядка ξ_0 вблизи границы; это сопровождается соответствующим проигрышем в энергии конденсации. Отсюда находим энергию границы $\gamma \sim (H_c^2/8\pi)\xi_0$ (т. е. $\delta \sim \xi_0$).

2. $\xi_0 \ll \lambda$. Только что рассмотренный вклад в этом случае пренебрежимо мал. Распределение поля мы можем рассчитать с помощью уравнения Лондонов; оно представлено на фиг. 21. В прежних обозначениях в N-области $h = H_c$, в S-области $h = H_c \exp(-x/\lambda)$. Термодинамический потенциал Гиббса принимает вид

$$\mathcal{G} = \int\limits_{x>0} d\mathbf{r}\left[F_n - \frac{H_c^2}{8\pi} + \frac{h^2}{8\pi} - \frac{Hh}{4\pi} + \frac{\lambda^2}{8\pi}\left(\frac{dh}{dx}\right)^2\right]. \qquad (2.74)$$

Здесь первый член — свободная энергия нормальной фазы в нулевом поле; второй — энергия конденсации ($\rho = 0$ для $x < 0$ и $\rho = 1$ для



Фиг. 21. Микроскопическая картина распределения поля вблизи границы раздела между нормальной и сверхпроводящей областями.

В нормальной области $h = H_c$, при удалении внутрь сверхпроводника поле h спадает на расстояниях порядка глубины проникновения λ.

$x > 0$); третий член — энергия магнитного поля и четвертый — микроскопический аналог величины $-BH/4\pi$. Наконец, последний член представляет кинетическую энергию токов.

Легко убедиться в том, что вдали от границы плотность термодинамического потенциала Гиббса одинакова в обеих фазах (условие равновесия) и что величину $\mathcal{G}$ можно записать в виде

$$\mathcal{G} = \int d\mathbf{r}\left(F_n - \frac{H_c^2}{8\pi}\right) + \gamma S,$$

где S — площадь границы, а γ — поверхностное натяжение

$$\gamma = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^\infty dx\left[h^2 + \lambda^2\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 - 2hH_c\right] = -\frac{H_c^2}{8\pi}\lambda. \qquad (2.75)$$

В этом предельном случае поверхностное натяжение *отрицательно*, т. е. система может понизить свою энергию путем образования новых границ. Таким образом, возникает тенденция максимально увеличить число границ, и, очевидно, магнитные свойства будут сильно отличаться от рассмотренных выше. Именно по этой причине материалы с $\xi_0 < \lambda$ носят название сверхпроводников второго рода. Мы изучим их в следующей главе.

ЛИТЕРАТУРА

Макроскопическое описание сверхпроводников первого рода

London F., Superfluids, vol. I, New York, 1950.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1959, гл. 6.

Нелокальная связь между током и вектором-потенциалом

Pippard A. B., Proc. Roy. Soc., **A216**, 547 (1953).

Измерение глубины проникновения

Schawlow A. L., Devlin G., Phys. Rev., **113**, 120 (1959).

Pippard A. B., Proc. 7th Internat. Conf. Low Temp. Phys., Toronto, 1960, p. 320.

Промежуточное состояние

Оптическое наблюдение доменов

De Sorbo W., Phys. Rev. Lett., **4**, 406 (1960).

De Sorbo W., Proc. 7th Internat. Conf. Low Temp. Phys., Toronto, 1960, p. 370.

Измерение поверхностной энергии

Schawlow A. L., Phys. Rev., **101**, 573 (1956).

Кинетика перехода из нормального в сверхпроводящее состояние

Faber T. E., Pippard A. B., в книге Progress in Low Temperature Physics, ed. C. G. Gorter, vol. I, Amsterdam, 1955, ch. 9.

Глава III

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА

§ 1. КРИВЫЕ НАМАГНИЧИВАНИЯ ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

Сверхпроводники второго рода характеризуются следующими макроскопическими свойствами.

1. Цилиндр, помещенный в продольное поле H, не обладает свойством полностью вытеснять магнитный поток (эффект Мейсснера), за исключением области слабых полей $H < H_{c1}$[1]). Если вычислить критическое поле H_c, определяемое разностью свободных энергий в нормальном и сверхпроводящем состояниях в нулевом поле

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2}{8\pi}, \tag{3.1}$$

то можно обнаружить, что поле H_{c1} заметно меньше, чем H_c. Например, для соединения V_3Ga калориметрические измерения разности $F_n - F_s$ в нулевом поле дают $(H_c)_{T=0} \approx 6000$ *гс*, в то время как из магнитных измерений следует, что $(H_{c1})_{T=0} \approx 200$ *гс*.

2. При $H > H_{c1}$ силовые линии проникают в цилиндр, однако даже при установлении теплового равновесия это проникновение не является полным. Поток ϕ, проходящий через цилиндр, имеет меньшую величину, чем в том случае, когда образец находится в нормальном состоянии. Это указывает на существование незатухающих токов в образце, который, следовательно находится все еще в сверхпроводящем состоянии. Такая ситуация имеет место для полей $H_{c1} \leqslant H \leqslant H_{c2}$. Поле H_{c2} превышает H_c и в некоторых случаях очень велико; для V_3Ga, например, $(H_{c2})_{T=0} \approx 300\,000$ *гс*.

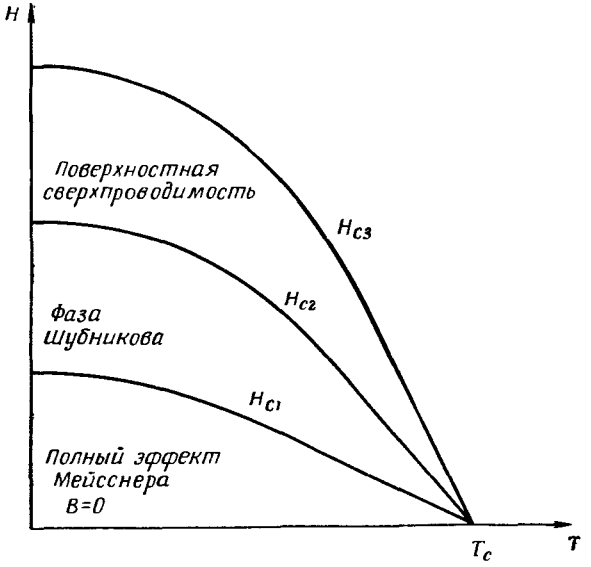
3. При $H > H_{c2}$ макроскопический образец вообще не вытесняет потока ($B \equiv H$). Однако даже в этом случае сверхпроводимость разрушается не полностью: в области полей $H_{c2} < H < H_{c3}$ на поверхности цилиндра сохраняется сверхпроводящая прослойка (толщиной $\sim 10^3$ Å). В большинстве случаев $H_{c3} \approx 1{,}69 H_{c2}$. Существование такой прослойки можно обнаружить, например, путем измерения сопротивления между двумя контактами на поверхности образца. Оказывается, что при малых измерительных токах сопротивление отсутствует. Физическая причина наличия прослойки состоит в следующем: небольшой сверхпроводящей области легче образоваться

---

[1]) Обозначение H_{c1} для нижнего поля было рекомендовано участниками конференции по сверхпроводимости в Колгейте в 1963 г.

вблизи поверхности образца точно так же, как пузырьку воздуха легче образоваться на дне кружки пива, чем в любой точке внутри ее. (Несколько более сложное доказательство этого утверждения мы обсудим в гл. V[1]).)

Изменение полей H_{c1}, H_{c2} и H_{c3} с температурой показано на фиг. 22. Мы сосредоточим теперь наше внимание на области полей $H_{c1} < H < H_{c2}$, в которой проникновение потока является частичным. Впервые существование этой области на плоскости (H, T) было ясно



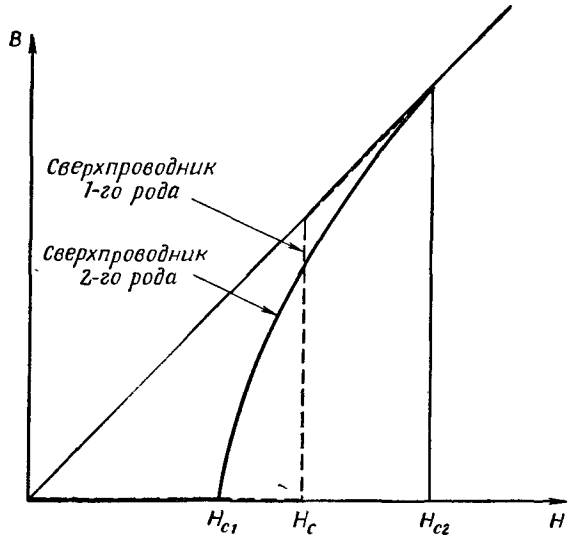
Фиг. 22. Фазовая диаграмма для сверхпроводника второго рода в форме длинного цилиндра.

продемонстрировано Шубниковым [32] в его ранних опытах со сплавами в 1937 г. Мы будем называть эту область фазой Шубникова или иногда вихревым состоянием[2]). (Последнее название связано с микроскопической картиной, описанной в § 2 этой главы).

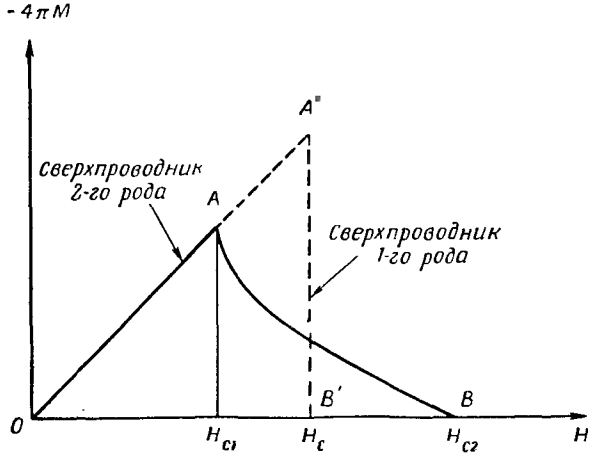
Частичное проникновение потока в фазе Шубникова можно описать с помощью диаграммы $B(H)$. Такая диаграмма показана,

[1]) Принято называть сверхпроводниками второго рода только те вещества, для которых $H_{c2} > H_c$. Что же касается упомянутой выше поверхностной прослойки, то возможен случай, когда $H_{c2} < H_c$, но $H_{c3} > H_c$. — *Прим. ред.*

[2]) Следуя Абрикосову [33], это состояние чаще называют смешанным состоянием. — *Прим. ред.*



Фиг. 23. Зависимость индукции B от величины приложенного поля H для сверхпроводников первого и второго рода.



Фиг. 24. Обратимые кривые намагничивания сверхпроводников первого и второго рода в форме длинного цилиндра.

Если значения поля H_c одинаковы для обоих материалов, то площади OAB и $OA'B'$ равны.

например, на фиг. 23. Иногда вместо индукции экспериментаторы предпочитают изображать намагниченность M, определяемую соотношением

$$M = \frac{B-H}{4\pi}. \tag{3.2}$$

Кривая $M(H)$ показана на фиг. 24. (На практике наблюдение этих кривых часто усложняется из-за трудности, связанной с достижением равновесного состояния; например, наличие структурных дефектов препятствует перемещению силовых линий.) Пунктиром на фиг. 24 изображена кривая намагничивания для сверхпроводника первого рода с тем же значением H_c. Эти две кривые обладают интересным свойством: охватываемые ими площади равны.

Доказательство. Обозначим через G_s плотность потенциала Гиббса для образца в сверхпроводящем состоянии

$$G_s = F_s(B) - \frac{BH}{4\pi}. \tag{3.3}$$

В равновесии при заданном поле H функция G_s обладает минимумом

$$\left(\frac{\partial G_s}{\partial B}\right)_H = 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим теперь плотность термодинамического потенциала Гиббса для образца в нормальном состоянии

$$G_n = F_n + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{BH}{4\pi}. \tag{3.5}$$

Из условия термодинамического равновесия в нормальной фазе $(\partial G_n/\partial B)_H = 0$ следует, что $B = H$. Отсюда

$$G_n = F_n - \frac{H^2}{8\pi}. \tag{3.6}$$

Дадим теперь полю H приращение δH, тогда из (3.3) и (3.4) следует

$$\frac{\partial G_s}{\partial H} = -\frac{B}{4\pi}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) аналогично находим

$$\frac{\partial G_n}{\partial H} = -\frac{H}{4\pi}, \tag{3.8}$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial H}(G_n - G_s) = \frac{B-H}{4\pi} = M. \tag{3.9}$$

Проинтегрируем теперь обе части последнего соотношения в пределах от $H = 0$ до $H = H_{c2}$. При $H = H_{c2}$ обе фазы находятся в термодинамическом равновесии $(G_n = G_s)$. При $H = 0\,(B = 0)$ имеем $G_n = F_n$ и $G_s = F_s$. Учитывая, кроме того, определение

$$(F_n - F_s)_{B=0} = \frac{H_c^2}{8\pi},$$

в результате получаем

$$\int_0^{H_{c2}} M\,dH = -\frac{H_c^2}{8\pi}. \tag{3.10}$$

Отсюда видно, что площадь, охватываемая кривой на фиг. 24, зависит лишь от величины H_c. Таким образом, путем измерения равновесных кривых намагничивания мы можем определить H_c, а значит, и энергию конденсации.

Обсудим теперь переход, происходящий во внешнем поле H, равном одному из предельных значений H_{c1} или H_{c2}. Сначала рассмотрим переход при $H = H_{c2}$. Опыт показывает, что для всех изученных до сих пор случаев этот переход является фазовым переходом *второго рода*.

1. Из магнитных измерений следует, что кривая $B(H)$ непрерывна при $H = H_{c2}$.

2. В том небольшом числе случаев (например, для V_3Ga), когда производились тепловые измерения, оказалось, что скрытая теплота перехода отсутствует, а теплоемкость терпит разрыв.

Величину скачка теплоемкости удается связать с ходом кривых намагничивания на основе чисто термодинамического рассмотрения (Гудман [34, 35]). Пусть i и j обозначают рассматриваемые фазы (в частности, индекс i будет относиться к фазе Шубникова, а j — к фазе с $B \equiv H$, в которой основная часть образца находится в нормальном состоянии). Запишем потенциал Гиббса для единицы объема i-й фазы

$$G_i = F_i(T, B_i) - \frac{B_i H}{4\pi}. \tag{3.11}$$

Связь между полем H и индукцией B в этой фазе следует из условия минимума G при заданных H и T

$$\frac{\partial}{\partial B_i} F_i(T, B_i) = \frac{H}{4\pi}. \tag{3.12}$$

Энтропия S_i определяется из соотношений

$$S_i = -\left(\frac{\partial G_i}{\partial T}\right)_H = -\frac{\partial F_i}{\partial T}. \tag{3.13}$$

Фазы i и j находятся в равновесии, когда поле удовлетворяет определенному условию $H = H^*(T)$ (в данном случае $H^* = H_{c2}$); вдоль этой кривой

$$G_i = G_j. \tag{3.14}$$

Предположим теперь, что скрытая теплота перехода отсутствует. Тогда на кривой $H = H^*(T)$ энтропия обеих фаз также имеет одинаковое значение

$$S_i = S_j. \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что индукция B в точке перехода не может иметь разрыва. Чтобы убедиться в этом, вычислим производную

$$\frac{dF_i}{dT} = \frac{\partial F_i}{\partial T} + \frac{\partial F_i}{\partial B_i}\frac{dB_i}{dT}, \tag{3.16}$$

взятую вдоль кривой равновесия [$dH = (dH^*/dT)\,dT$]. Отсюда с помощью (3.11) — (3.13) находим производную от G (также вдоль кривой равновесия)

$$\frac{dG_i}{dT} = -S_i - \frac{B_i}{4\pi}\frac{dH^*}{dT}. \tag{3.17}$$

Поскольку вдоль равновесной кривой ($G_i = G_j$)

$$\frac{dG_i}{dT} = \frac{dG_j}{dT},$$

$$S_i = S_j,$$

из (3.17) неизбежно следует, что $B_i = B_j$, т. е. при переходе индукция B остается непрерывной.

Вычислим теперь теплоемкость в постоянном поле H

$$C_i = T\left(\frac{\partial S_i}{\partial T}\right)_H. \tag{3.18}$$

Удобно, как и раньше, выразить фигурирующую здесь частную производную через полную производную от энтропии, взятую вдоль кривой равновесия,

$$\frac{dS_i}{dT} = \left(\frac{\partial S_i}{\partial T}\right)_H + \left(\frac{\partial S_i}{\partial H}\right)_T \frac{dH^*}{dT}. \tag{3.19}$$

Согласно (3.15), вдоль кривой равновесия

$$\frac{dS_i}{dT} = \frac{dS_j}{dT},$$

следовательно,

$$C_j - C_i = T\frac{dH^*}{dT}\left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial H}\right)_T - \left(\frac{\partial S_j}{\partial H}\right)_T\right]. \tag{3.20}$$

Образуем теперь с помощью (3.12) и (3.13) производную $(\partial S_i/\partial H)_T$ следующим образом:

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial H}\right)_T = \left(\frac{\partial S_i}{\partial B_i}\right)_T \left(\frac{\partial B_i}{\partial H}\right)_T = -\frac{\partial^2 F_i}{\partial B_i\,\partial T}\left(\frac{\partial B_i}{\partial H}\right)_I = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial H(B_i, T)}{\partial T}\left(\frac{\partial B_i}{\partial H}\right)_T. \tag{3.21}$$

Наконец, изменение поля H^* с температурой T запишем в виде

$$\frac{dH^*}{dT} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{B_i} + \left(\frac{\partial H}{\partial B_i}\right)_T \frac{dB}{dT}, \tag{3.22}$$

где производная

$$\frac{dB}{dT}=\frac{dB_i}{dT}=\frac{dB_j}{dT}$$

представляет собой изменение индукции B вдоль равновесной кривой. Подставляя $(\partial H/\partial T)_B$ из (3.22) в (3.21), получаем

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial H}\right)_T=-\frac{1}{4\pi}\frac{dH^*}{dT}\left(\frac{\partial B_i}{\partial H}\right)_T+\frac{1}{4\pi}\frac{dB}{dT} \tag{3.23}$$

и

$$C_j-C_i=\frac{T}{4\pi}\left(\frac{dH^*}{dT}\right)^2\left[\left(\frac{\partial B_j}{\partial H}\right)_T-\left(\frac{\partial B_i}{\partial H}\right)_T\right]. \tag{3.24}$$

Следовательно, если известна зависимость $H^*(T)$ и магнитная проницаемость $(\partial B_i/\partial H)_T$ каждой из фаз, можно предсказать величину скачка теплоемкости при переходе. Для интересующего нас перехода $i\to j$ (см. фазовую диаграмму на фиг. 23) из вихревого состояния i (восприимчивость конечна и больше единицы) в нормальное состояние j (восприимчивость равна единице) имеем $C_i>C_j$. Существующих в настоящее время экспериментальных данных недостаточно для количественной проверки соотношения (3.24). Тем не менее для случая V_3Ga значения C_i-C_j и dH_{c2}/dT известны. Делая разумную экстраполяцию производной $\partial B/\partial H$, чтобы оценить ее значение при $H=H_{c2}$, мы получаем согласие магнитных и калориметрических измерений в пределах 10%. Аналогичное рассмотрение можно произвести в принципе также для перехода при $H=H_{c1}$. В этом случае, однако, проницаемость $(\partial B/\partial H)_{H=H_{c1}}$ в фазе Шубникова, по всей вероятности, обращается в бесконечность, как следует из теоретического анализа § 2 настоящей главы. Согласно (3.24), это должно привести к бесконечному пику на кривой теплоемкости в точке перехода. На самом деле эта особенность является слабой и легко может быть замаскирована различными гистерезисными эффектами. Недавно она наблюдалась на ниобии группой экспериментаторов из университета Рутгерса в США [36, 37][1]).

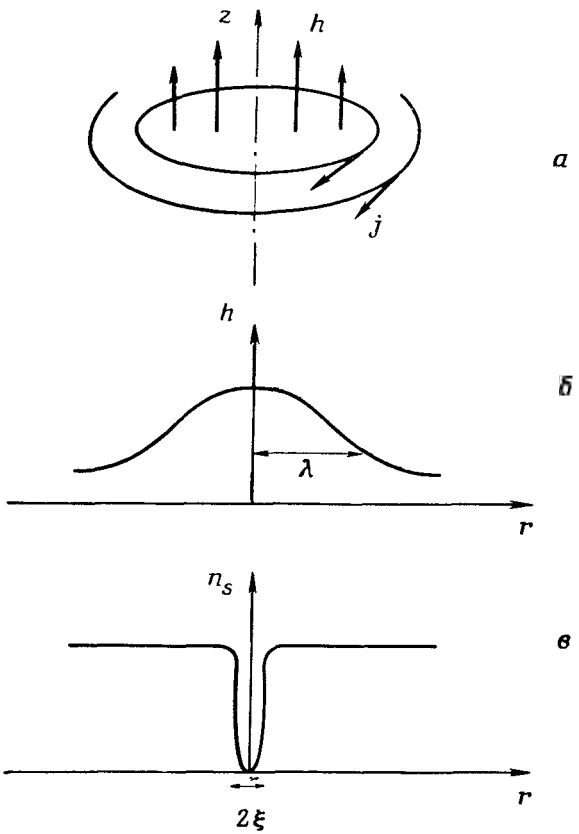
§ 2. МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВИХРЕВОГО СОСТОЯНИЯ

Отрицательная поверхностная энергия

Выше мы видели, что в лондоновском сверхпроводнике ($\xi<\lambda$) поверхностное натяжение на границе раздела между нормальной и сверхпроводящей областями является отрицательным. При таких условиях естественно считать, что при наличии поля возникает состояние, в котором области N и S подразделены очень мелко, т. е. сильно перемешаны, а энергия границ вносит важный вклад в термо-

[1]) См. также [38]. — *Прим. ред.*

динамический потенциал Гиббса. Эта ситуация сильно отличается от той, с которой мы сталкивались в случае пиппардовского сверхпроводника, когда число границ мало и их энергией можно пренебречь при макроскопическом подходе.



Фиг. 25. Структура изолированной вихревой нити в сверхпроводнике второго рода.

а — конфигурация полей и токов, создаваемых вихревой нитью; *б* — зависимость магнитного поля от расстояния до центра нити; *в* — изменение плотности сверхпроводящих электронов n_s в области остова нити ($r \leqslant \xi$).
Магнитное поле максимально в центре нити и убывает по мере удаления от него, т. е. заключено в области порядка глубины проникновения λ; наоборот, плотность электронов уменьшается лишь в небольшой области остова, имеющего радиус ξ.

Рассмотрим предельный случай, когда индукция B мала (т. е. мало число силовых линий, проникающих в образец и, следовательно, лишь незначительная часть объема находится в нормальном состоянии). Наиболее вероятными представляются два типа областей N,

для которых можно ожидать наибольшей величины отношения поверхностных эффектов к объемным: слои очень малой толщины ($\geqslant \xi$) и нити малого диаметра ($\sim \xi$). В случае $\lambda \gg \xi$ теоретический расчет (см. задачу на стр. 75) показывает, что меньшей энергией обладает нитевидная структура, изучением которой мы сейчас и займемся.

Структура изолированной вихревой нити показана на фиг. 25, *а*. Нить обладает жестким остовом радиусом ξ, в котором плотность сверхпроводящих электронов n_s при приближении к центру убывает до нуля, как показано на фиг.25. *в*. Силовые линии магнитного поля имеются не только в области остова. Поле имеет максимальное значение в центре нити и простирается на расстояния $r \sim \lambda$; круговые токи $\mathbf{j}$, связанные с полем, приводят к экранированию последнего при $r \gtrsim \lambda$ (фиг. 25, *б*). При $r > \xi$, т. е. в большей части области, представляющей для нас интерес, распределение полей и токов можно просто рассчитать с помощью уравнений Лондонов. Забегая вперед, заметим, что радиус и точная форма остова входят в соответствующие величины лишь под знаком логарифма, т. е. нам не нужно знать их точно. Действительно, мы увидим, что в пределе $\xi \ll \lambda$ свойства изолированной вихревой нити могут быть сравнительно легко рассчитаны до конца.

Найдем величину магнитного потока

$$\phi = \int \mathbf{h} \cdot d\sigma,$$

связанного с одной нитью. Эксперимент и теория показывают, что если через отверстие в массивном сверхпроводнике проходит некоторое число силовых линий магнитного поля, то связанный с ними магнитный поток может принимать лишь дискретные значения

$$\phi = k\phi_0, \qquad \phi_0 = \frac{ch}{2e} = 2 \cdot 10^{-7}\ гс \cdot см^2, \tag{3.25}$$

где k — целое число. Объяснение этого эффекта будет дано в конце гл. IV. Результат (3.25) определяет также величину потока, связанного с отдельной нитью. Иначе говоря, требование, чтобы с вихревой нитью был связан один квант потока ϕ_0, как раз и соответствует максимальному расслоению системы на фазы. Это условие определяет масштаб картины распределения поля вблизи нити на фиг. 25, *б* и полностью задает структуру отдельной нити.

Такая квантовая нить, состоящая из очень тонкого и жесткого остова, окруженного круговыми токами, весьма напоминает вихревые нити, которые образуются в сверхтекучем He^4 при вращении содержащего его сосуда. Единственное отличие состоит в том, что атомы He^4 не заряжены, т. е. в уравнении (1.13) нужно положить $e = 0$. Таким образом, мы видим, что глубина проникновения λ в случае He^4

бесконечна и что на больших расстояниях от нити поток $\mathbf{j}$, связанный с движением частиц, не убывает экспоненциально, а медленно спадает (как $1/r$). Впервые вихревые нити обсуждались Онсагером [39] и Фейнманом [40] в связи с явлением сверхтекучести He^4; обобщение на случай сверхпроводимости произвел Абрикосов [33] в 1956 г. Если в сверхпроводящем металле плотность вихревых нитей конечна, то мы будем часто впоследствии говорить, что он находится в вихревом состоянии.

Свойства изолированной вихревой нити

Перейдем теперь к детальному изучению структуры отдельной вихревой нити в пределе $\lambda \gg \xi$. Поскольку „жесткий остов" (радиус которого ξ) в этом случае мал, при вычислении энергии мы на некоторое время пренебрежем его вкладом [1]). Выражение для энергии отдельной нити можно представить в виде

$$\mathcal{J} = \int\limits_{r>\xi} d\mathbf{r}\, \frac{1}{8\pi} [\mathbf{h}^2 + \lambda^2 (\operatorname{rot} \mathbf{h})^2]. \tag{3.26}$$

Выражение (3.26) было выведено в гл. I (в предположении, что $\lambda \gg \xi$). Глубина проникновения λ для чистого сверхпроводника дается выражением Лондонов

$$\lambda_L = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}\right)^{1/2}. \tag{3.27}$$

Для сверхпроводящих сплавов с $\lambda \gg \xi$ выражение (3.26) по-прежнему применимо, однако вместо λ нужно подставить несколько большее значение [см. обсуждение формулы (2.20) в гл. II]. Интегрирование в (3.26) ведется по всему пространству, за исключением остова, т. е. по области $r > \xi$. Вычислим энергию $\mathcal{J}$, отнесенную к единице длины нити, и назовем ее линейным натяжением.

Из условия минимальности значения $\mathcal{J}$ мы приходим обычным образом к уравнению Лондонов

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0, \quad |r| > \xi. \tag{3.28}$$

Внутри остова вместо (3.28) следует применить несколько более сложное уравнение, однако, поскольку радиус остова весьма мал, можно заменить имеющуюся особенность двумерной δ-функцией $\delta_2(\mathbf{r})$ и написать

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \boldsymbol{\phi}_0 \delta_2(\mathbf{r}), \tag{3.29}$$

где $\boldsymbol{\phi}_0$ — некоторый вектор вдоль направления линии.

[1]) То есть пренебрежем изменением энергии конденсации сверхпроводящей фазы. — *Прим. ред.*

Покажем сейчас, что сила источника ϕ_0 в уравнении (3.29) представляет собой полный поток, переносимый нитью. Проинтегрируем для этого обе стороны уравнения по площади кругового контура C радиусом r, центр которого лежит на оси нити. Воспользовавшись формулой Стокса, получим

$$\int \mathbf{h} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \lambda^2 \oint \operatorname{rot} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \phi_0. \tag{3.30}$$

Будем считать, что $r \gg \lambda$, тогда токами

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{h},$$

а следовательно, и контурным интегралом можно пренебречь. Таким образом, полный поток, связанный с нитью, равен ϕ_0.

Перейдем к решению уравнения (3.29) совместно с уравнением Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \tag{3.31}$$

Поле $\mathbf{h}$ направлено вдоль оси z, линии тока являются окружностями в плоскости xy. Нетрудно вычислить величину $\operatorname{rot} \mathbf{h}$ (т. е. ток) в области $\xi \ll r \ll \lambda$. Действительно, вернемся к уравнению (3.30), в котором круговой контур C лежит в рассматриваемой области. В этом случае можно пренебречь первым членом, поскольку через контур C проходит относительно малая доля ($\sim r^2/\lambda^2$) полного потока ϕ_0. Таким образом,

$$\lambda^2 2\pi r \,|\operatorname{rot} \mathbf{h}| = \phi_0, \tag{3.32}$$

или

$$|\operatorname{rot} \mathbf{h}| = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{1}{r}, \quad \xi < r \ll \lambda. \tag{3.33}$$

Полагая

$$|\operatorname{rot} \mathbf{h}| = -\frac{dh}{dr}$$

и интегрируя, находим

$$h = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \left(\ln \frac{\lambda}{r} + \text{const} \right), \quad \xi < r \ll \lambda. \tag{3.34}$$

Для определения постоянной интегрирования в выражении (3.34) необходимо воспользоваться точным решением уравнений (3.30) и (3.31):

$$h = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right), \tag{3.35}$$

где K_0 — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента [41]. Нам понадобится лишь асимптотический вид (3.34) этого решения для $r \ll \lambda$, где постоянная, как можно показать, равна нулю. Что же

касается поведения на больших расстояниях, то оно следует из (3.35):

$$h=\frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2}\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r}}\,e^{-r/\lambda},\quad r\gg\lambda. \tag{3.36}$$

Зная выражение для поля, легко вычислить энергию $\mathcal{J}$. Интегрируя по частям второй член в (3.26), находим

$$\mathcal{J}=\frac{\lambda^2}{8\pi}\int(\mathbf{h}\times\operatorname{rot}\mathbf{h})\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{3.37}$$

где интеграл по σ берется по поверхности остова, в качестве которого мы выберем цилиндр радиусом порядка ξ. Соответственно линейное натяжение $\mathcal{J}$ запишем в виде

$$\mathcal{J}=\frac{\lambda^2}{8\pi}2\pi\xi h(\xi)\,|\operatorname{rot}\mathbf{h}|_{r=\xi}. \tag{3.38}$$

Подставив сюда выражения (3.33) и (3.34), окончательно получим

$$\mathcal{J}=\left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2\ln\frac{\lambda}{\xi}. \tag{3.39}$$

Обсуждение формулы (3.39)

В связи с выражением (3.39) обратим внимание на следующие важные моменты.

1. Линейное натяжение $\mathcal{J}$ лишь логарифмически зависит от ξ.

2. Величина $\mathcal{J}$ пропорциональна квадрату полного потока нити. Это означает, например, что в том случае, когда поток равен $2\phi_0$, образование двух нитей, каждая из которых несет квант потока ϕ_0 (полная энергия равна $2\mathcal{J}$), более предпочтительно, нежели образование одной нити с удвоенным потоком (с энергией $4\mathcal{J}$). Таким образом, фигурирующий здесь поток ϕ_0 должен иметь наименьшее значение, равное кванту потока [см. (3.25)].

3. Запишем выражение для $\mathcal{J}$ (при $T=0$) в несколько ином виде, используя формулы

$$\phi_0=\frac{ch}{2e},\quad \xi=\xi_0=\frac{\hbar v_F}{\pi\Delta(0)} \tag{3.40}$$

и соотношение (которое будет доказано при изложении микроскопической теории) между энергией конденсации и энергетической щелью $\Delta(0)$

$$\frac{H_c^2}{8\pi}=\frac{1}{2}N(0)\Delta^2(0), \tag{3.41}$$

где $N(0)=m^2v_F/2\pi^2\hbar^3$ — плотность состояний (с данным направлением спина) на фермиевской поверхности в нормальном металле.

Комбинируя эти формулы, получаем

$$\mathcal{J} = \frac{\pi^3}{3}\frac{H_c^2}{8\pi}\xi^2 \ln\frac{\lambda}{\xi} \quad (T=0). \tag{3.42}$$

Такая форма записи представляет интерес по следующей причине. До сих пор мы пренебрегали вкладом остова в энергию нити. Так как в области остова сверхпроводимость более или менее разрушена, этот вклад составляет $\sim (H_c^2/8\pi)\xi^2$. По своей структуре это выражение имеет много общего с выражением (3.42) для $\mathcal{J}$, но численно дает гораздо меньшие значения. Детальный расчет приводит к следующему выражению для линейного натяжения:

$$\mathcal{J} = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2\left(\ln\frac{\lambda}{\xi} + \varepsilon\right), \quad \lambda \gg \xi, \tag{3.43}$$

где числовая постоянная ε учитывает вклад остова нити и приближенно равна 0,1.

Задача. Обсудить структуру вихря, образующегося в тонкой пластинке в магнитном поле, перпендикулярном ее плоскости (Пирл [42]).

Р е ш е н и е. Здесь, как и в случае вихревой нити, имеется „жесткий остов" малого радиуса ξ, окруженный кольцевыми токами. Однако, поскольку эти токи могут располагаться теперь лишь в пределах толщины пластинки d, их экранирующее действие является слабым и поле может проникать на значительно большие расстояния, чем в предыдущем случае.

Внутри пластинки применимо уравнение (3.29)

$$\mathbf{h} + \frac{4\pi\lambda^2}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j} = \phi_0 \mathbf{n}_z \delta_2(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока, а $\mathbf{n}_z$ — единичный вектор нормали к поверхности пластинки. Удобно перейти от поля $\mathbf{h}$ к вектору-потенциалу $\mathbf{A}$, воспользовавшись соотношением

$$\mathbf{h} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

В лондоновской калибровке имеем

$$\mathbf{A} + \frac{4\pi\lambda^2}{c}\mathbf{j} = \boldsymbol{\Phi},$$

в цилиндрической системе координат: $\Phi_r = \Phi_z = 0$, $\Phi_\theta = \phi_0/2\pi r$.

Произведем теперь усреднение по толщине пластинки, учитывая, что при $d \ll \lambda$ величины $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$ почти не зависят от z. Обозначив полный ток через $\mathbf{J}$, находим

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}d = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{\lambda_{\text{эфф}}}(\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{A}), \qquad \lambda_{\text{эфф}} = \frac{\lambda^2}{d}.$$

Заменим теперь задачу о пластинке конечной толщины задачей о плоскости ($z = 0$), по которой течет ток с плотностью $\mathbf{J}\delta(z)$. Такая процедура законна до тех пор, пока толщина пластинки d мала по сравнению с глубиной проникновения поля.

С помощью найденного выражения для плоского тока напишем теперь уравнение, справедливое во всем пространстве,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{h} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \lambda_{\text{эфф}}^{-1}(\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{A})\,\delta(z),$$

или, считая калибровку лондоновской (rot rot $\mathbf{A} = -\nabla^2\mathbf{A}$),

$$-\nabla^2\mathbf{A} + \lambda_{эфф}^{-1}\mathbf{A}\delta(z) = \lambda_{эфф}^{-1}\Phi\delta(z).$$

Этот результат мы получили, основываясь на уравнении Лондонов (3.29). К сожалению, для реальных пластинок столь простое уравнение применимо далеко не всегда. Тем не менее можно считать, что отклик системы имеет по-прежнему линейный характер

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi\lambda_{эфф}}(\Phi - \mathbf{A}),$$

где $\lambda_{эфф}$ — некоторая неизвестная константа, которую можно найти из независимых измерений. В сущности $\lambda_{эфф}$ есть глубина проникновения для пластинки в поле, параллельном ее плоскости; проще всего ее определить из опытов на полых цилиндрах (изготовленных из того же материала).

Чтобы решить уравнение относительно $\mathbf{A}$, введем трех- и двумерные фурье-компоненты:

$$\mathbf{A}_{qk} = \int \mathbf{A}(x, y, z)\, e^{i(q_x x + q_y y + kz)}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\mathbf{A}_q = \frac{1}{2\pi}\int \mathbf{A}_{qk}\, dk = \int \mathbf{A}\delta(z)\, e^{i(q_x x + q_y y)}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\Phi_q = \int \Phi(x, y)\, e^{i(q_x x + q_y y)}\, dx\, dy = i\frac{\phi_0}{q^2}\,\mathbf{n}_z \times \mathbf{q}.$$

Тогда

$$-(q^2 + k^2)\,\mathbf{A}_{qk} + \lambda_{эфф}^{-1}\mathbf{A}_q = \lambda_{эфф}^{-1}\Phi_q.$$

Выразив отсюда $\mathbf{A}_{qk}$ и интегрируя затем по k, находим

$$\mathbf{A}_q = \frac{1}{2\pi}\int \frac{dk}{q^2 + k^2}\,\frac{1}{\lambda_{эфф}}(\mathbf{A}_q - \Phi_q) = \frac{1}{2q\lambda_{эфф}}(\mathbf{A}_q - \Phi_q),$$

$$\mathbf{A}_q = \Phi_q\,\frac{1}{1 + 2q\lambda_{эфф}}.$$

Эти формулы позволяют получить все интересующие нас сведения.

а) Фурье-компонента тока равна

$$\mathbf{J}_q = \frac{c}{4\pi\lambda_{эфф}}(\Phi_q - \mathbf{A}_q) = \frac{c}{4\pi\lambda_{эфф}}\,\frac{2q\lambda_{эфф}}{1 + 2q\lambda_{эфф}}\,\Phi_q.$$

При $q \gg \lambda_{эфф}^{-1}$ компонента $\mathbf{J}_q$ пропорциональна Φ_q, поэтому на малых расстояниях r от центра вихря

$$\mathbf{J}(r) = \frac{c}{4\pi\lambda_{эфф}}\Phi(r),$$

$$J(r) = \frac{c\phi_0}{8\pi^2\lambda_{эфф}r}, \qquad \xi \ll r \ll \lambda_{эфф}.$$

При $q \ll \lambda_{эфф}^{-1}$ имеем

$$\mathbf{J}_q \approx \frac{c}{4\pi\lambda_{эфф}}\,2q\lambda_{эфф}\Phi_q = \frac{c\phi_0}{2\pi}\,\frac{i\mathbf{n}_z \times \mathbf{q}}{q},$$

$$J(r) = \frac{c\phi_0}{4\pi^2 r^2} \quad \text{при} \quad r \gg \lambda_{эфф}.$$

Радиус области экранирования составляет $\sim\lambda_{эфф}$, однако даже при $r > \lambda_{эфф}$ ток J медленно спадает с расстоянием.

б) Нормальная составляющая поля h_z дается выражением

$$\mathbf{h}_{zq} = i\mathbf{q} \times \mathbf{A}_q = \frac{\phi_0}{1+2q\lambda_{эфф}} \mathbf{n}_z.$$

При $q \gg \lambda_{эфф}^{-1}$

$$h_{zq} \approx \frac{\phi_0}{2q\lambda_{эфф}},$$

$$h_z(r) \approx \frac{\phi_0}{4\pi\lambda_{эфф} r}, \qquad \xi < r \ll \lambda_{эфф}.$$

Для больших расстояний r поле h_z наиболее просто найти, исходя непосредственно из выражения для тока $J(r)$:

$$h_z(r) = -\frac{4\pi\lambda_{эфф}}{c} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(Jr),$$

$$h_z(r) \approx \frac{2}{\pi} \frac{\phi_0 \lambda_{эфф}}{r^3}.$$

в) Собственную энергию вихря можно получить с помощью выражения (3.26); необходимые для такого расчета компоненты $\mathbf{h}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{h}$ на поверхности остова ($\xi \ll \lambda_{эфф}$) приведены выше. В результате находим

$$E = \left(\frac{\phi_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\lambda_{эфф}} \ln\frac{\lambda_{эфф}}{\xi} = \frac{137}{16} \frac{\hbar c}{\lambda_{эфф}} \ln\frac{\lambda_{эфф}}{\xi}.$$

Типичное значение $\lambda_{эфф} \sim 1000$ Å и $E \sim 30$ *эв*.

г) Сила взаимодействия между двумя вихрями равна

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\phi_0}{c} \mathbf{n}_z \times \mathbf{J}(R_{12})$$

и соответствует отталкиванию. Поэтому на больших расстояниях, где $J \sim R^{-2}$, энергия взаимодействия убывает лишь как R^{-1}. Такое медленное спадание связано с тем, что взаимодействие в основном происходит не через сверхпроводник, а через пустое пространство снаружи от него.

Взаимодействие вихревых нитей

Случай двух нитей Рассмотрим две нити, параллельные оси z и проходящие при $z=0$ через точки $\mathbf{r}_1=(x_1, y_1)$ и $\mathbf{r}_2=(x_2, y_2)$. Результирующее распределение магнитного поля описывается уравнением

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h} = \phi_0[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)], \tag{3.44}$$

которое является просто обобщением уравнения (3.29). Решение $\mathbf{h}$ представляет собой суперпозицию двух полей $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$, создаваемых соответственно нитями 1 и 2

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{h}_2(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{h}_1(\mathbf{r}) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{\lambda}\right). \tag{3.45}$$

Выражение для энергии системы сохраняет свой прежний вид

$$E=\int \frac{\mathbf{h}^2+\lambda^2(\operatorname{rot}\mathbf{h})^2}{8\pi}\,d\mathbf{r}=\frac{\lambda^2}{8\pi}\int(\mathbf{h}\times\operatorname{rot}\mathbf{h})\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \qquad (3.46)$$

где интеграл по σ берется на этот раз по поверхности остовов ($|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|=\xi$) обеих нитей. Выписывая в явной форме вклад от каждой нити, имеем

$$E=\frac{\lambda^2}{8\pi}\int(d\boldsymbol{\sigma}_1+d\boldsymbol{\sigma}_2)\cdot(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)\times(\operatorname{rot}\mathbf{h}_1+\operatorname{rot}\mathbf{h}_2). \qquad (3.47)$$

Фигурирующие здесь 8 членов разобьем на следующие три группы:

1. Сумма собственных энергий изолированных нитей

$$2\mathcal{J}=\frac{\lambda^2}{8\pi}\left[\int d\boldsymbol{\sigma}_1\cdot(\mathbf{h}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{h}_1)+\int d\boldsymbol{\sigma}_2\cdot(\mathbf{h}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{h}_2)\right].$$

2. Члены вида

$$\int(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{h}_1\times d\boldsymbol{\sigma}_2+\operatorname{rot}\mathbf{h}_2\times d\boldsymbol{\sigma}_1),$$

стремящиеся к нулю в пределе $\xi\ll\lambda$, поскольку величины $\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2$ и $\operatorname{rot}\mathbf{h}_1$ остаются конечными в области интегрирования по σ_2.

3. Остающиеся члены вида

$$U_{12}=\frac{\lambda^2}{8\pi}\left[\int(\mathbf{h}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{h}_2)\cdot d\boldsymbol{\sigma}_2+\int(\mathbf{h}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{h}_1)\cdot d\boldsymbol{\sigma}_1\right] \qquad (3.48)$$

описывают вклад в энергию за счет взаимодействия нитей.

Рассмотрим первый член в (3.48). Согласно (3.33),

$$|\operatorname{rot}\mathbf{h}_2|\sim\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\quad\text{при}\quad\xi<|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\ll\lambda,$$

поэтому входящий в (3.48) интеграл отличен от нуля даже в пределе $\xi\to 0$. То же самое относится и ко второму члену. Полагая в (3.48)

$$h_{12}=h_1(r_2)=h_2(r_1)=\frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2}K_0\left(\frac{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}{\lambda}\right) \qquad (3.49)$$

и используя (3.33), находим энергию взаимодействия, отнесенную к единице длины одной из нитей

$$U_{12}=\frac{\phi_0 h_{12}}{4\pi}\qquad(\xi\ll\lambda). \qquad (3.50)$$

Очевидно, энергия U_{12} отвечает *отталкиванию нитей*. На больших расстояниях она убывает

$$U_{12}\sim\frac{1}{\sqrt{r_{12}}}e^{-r_{12}/\lambda}\quad\text{при}\quad r_{12}\to\infty$$

и логарифмически расходится как $\ln|\lambda/r_{12}|$ на малых расстояниях между нитями.

Замечание по поводу сил. Воспользуемся найденным выражением (3.50) для энергии взаимодействия U_{12} и вычислим силу $\mathbf{f}_2$, действующую на нить 2,

$$f_{2x} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} = -\frac{\phi_0}{4\pi}\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}. \tag{3.51}$$

Введем теперь плотность тока $\mathbf{j}=n_s e\mathbf{v}$, который существовал бы в точке (x_2, y_2) при наличии лишь одной нити 1. Из уравнения Максвелла следует

$$j_y = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}.$$

Сравнивая это выражение с (3.51), находим

$$f_{2x} = \frac{\phi_0}{c} j_y = \frac{1}{2} h n_s v_y. \tag{3.52}$$

Полученный результат (3.52) остается в силе и в том случае, когда нить 2 взаимодействует с произвольным числом других нитей; при этом v следует понимать как суммарную скорость „сверхтекучего" движения в точке (x_2, y_2) в отсутствие нити 2. В частности, если „сверхтекучая" скорость в любой точке на оси нити равна нулю, последняя находится в статическом равновесии.

Кривые намагничивания

Построим теперь термодинамический потенциал Гиббса для системы большого числа нитей, а затем из условия его минимума найдем равновесную плотность нитей в образце. В предыдущих обозначениях

$$G = n_L \mathcal{G} + \sum_{ij} U_{ij} - \frac{BH}{4\pi}. \tag{3.53}$$

Первый член в этом выражении представляет сумму энергий невзаимодействующих нитей (n_L—число нитей на единицу площади). Поскольку каждая нить переносит один квант потока ϕ_0, индукцию B можно записать в виде

$$B = n_L \phi_0. \tag{3.54}$$

Второй член в (3.53) описывает энергию отталкивательного взаимодействия между нитями; явное выражение для U_{ij} было приведено выше [см. (3.49) и (3.50)]. Наконец, последний член учитывает влияние внешнего магнитного поля H; благодаря ему энергетически выгодны большие значения индукции B. Иными словами, поле H играет роль внешнего давления, которое стремится увеличить плотность нитей.

Чтобы произвести количественную оценку роли взаимодействия, удобно выделить несколько областей.

1. Область малых значений индукций ($n_L\lambda^2 \ll 1$), в которой существенную роль играет лишь взаимодействие ближайших соседей. В результате сумма по i и j быстро сходится и может быть легко вычислена.

2. Область бо́льших значений индукции ($n_L\lambda^2 \gg 1$), где радиус взаимодействия $\sim\lambda$ велик по сравнению с пространственным периодом

решетки, образованной нитями. Для вычисления суммы по i и j необходим другой подход.

3. Наконец, область, где плотность нитей n_L сравнима с ξ^{-2} и остовы нитей начинают перекрываться. В этом случае используемые здесь элементарные способы расчета неприменимы. Качественно, однако, ясно, что перекрытие остовов означает почти полное разрушение сверхпроводимости в толще образца при $B \sim \phi_0/\xi^2$.

Нижнее поле H_{c1}

При малой плотности вихревых нитей (малых B) их взаимодействие мало, поэтому в первом приближении им можно пренебречь. Тогда получаем, согласно (3.53),

$$G \approx B\left(\frac{\mathcal{J}}{\phi_0} - \frac{H}{4\pi}\right). \tag{3.55}$$

Отсюда видно, что при $H < 4\pi\mathcal{J}/\phi_0$ плотность потенциала Гиббса является возрастающей функцией B, т. е. наименьшему значению G отвечает $B = 0$ (полный эффект Мейсснера).

Напротив, при $H > 4\pi\mathcal{J}/\phi_0$ значение G может быть меньше при $B \neq 0$. Это соответствует частичному проникновению силовых линий в сверхпроводник.

Таким образом, нижнее поле определяется соотношением

$$H_{c1} = \frac{4\pi\mathcal{J}}{\phi_0} = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}. \tag{3.56}$$

Величина этого поля часто может быть значительно меньше поля H_c, определяемого соотношением (3.1). Например, при $T = 0$, используя (3.40) и (3.41), находим

$$\frac{H_{c1}}{H_c} = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\xi}{\lambda} \ln \frac{\lambda}{\xi}, \tag{3.57}$$

т. е. отношение $H_{c1}/H_c \sim \xi/\lambda$, и поэтому может принимать довольно малые значения.

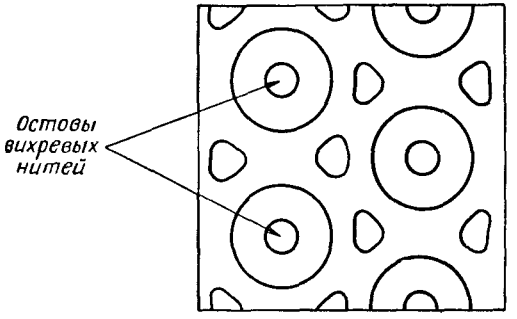
Измерение значений H_{c1} и H_c позволяет в принципе определить ξ и λ. Например, для V_3Ga при $T = 0$ имеем $H_c \sim 6000$ *гс* и $H_{c1} \sim 200$ *гс*, и, согласно (3.57), $\lambda/\xi \sim 80$. С помощью (3.56) находим $\lambda \sim 2000$ Å и $\xi \sim 25$ Å. Эти оценки верны лишь по порядку величины, поскольку существующие в настоящее время значения H_c и H_{c1} известны недостаточно точно. Однако есть основания надеяться, что в ближайшем будущем положение улучшится.

Поле, немного превышающее H_{c1}

Если плотность нитей конечна (конечные значения B), то необходимо учитывать в (3.53) член, описывающий взаимодействие нитей. При этом естественно ожидать, что минимуму отталкивательного взаимодействия будет отвечать вполне определенное периодическое расположение нитей. Детальный расчет на основе соотношения (3.53)

показывает [43, 44], что для всех значений индукции B энергетически наиболее выгодной является треугольная решетка нитей (фиг. 26).

Очевидно, когда поле H лишь ненамного превышает значение H_{c1}, равновесная плотность нитей n_L мала, а расстояние d между ближайшими нитями велико ($d > \lambda$). Поэтому в члене взаимодействия



Фиг. 26. Треугольная решетка вихревых нитей (Клейнер и др. [44]).

Плоскость фигуры перпендикулярна направлению поля. Замкнутые контуры являются линиями постоянных значений n_s. Схема относится к случаю сильных полей (остовы нитей почти перекрываются).

мы можем учитывать вклад только от ближайших пар соседей; тогда выражение (3.53) принимает вид

$$G \approx \frac{B}{4\pi}\left[H_{c1} - H + \frac{1}{2} z \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{d}{\lambda}\right)\right], \tag{3.58}$$

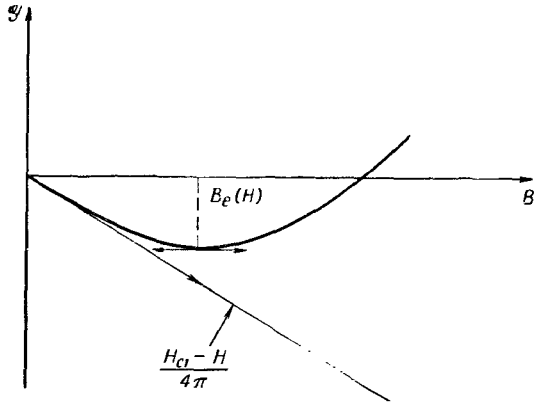
где z — число ближайших соседей данной нити (для треугольной решетки $z = 6$), а расстояние d связано с индукцией B соотношением

$$B \equiv n_L \phi_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\phi_0}{d^2}. \tag{3.59}$$

Вид функции $G(B)$ показан на фиг. 27. При $H > H_{c1}$ начальный наклон $(\partial G/\partial B)_{B=0}$ отрицателен. При увеличении индукции B член взаимодействия начинает расти, однако довольно медленно. Это связано с тем, что он содержит множитель $K_0(d/\lambda)$, который при $d > \lambda$, согласно (3.36), имеет вид

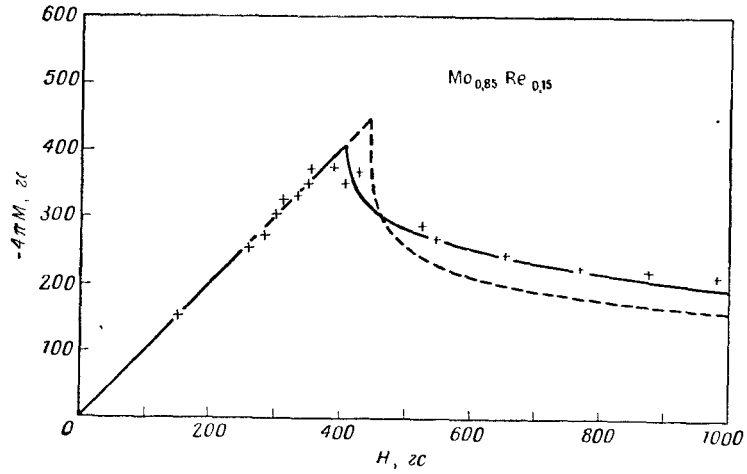
$$K_0\left(\frac{d}{\lambda}\right) \sim \exp\left(-\frac{d}{\lambda}\right) = \exp\left(-1{,}07\sqrt{\frac{\phi_0}{B\lambda^2}}\right). \tag{3.60}$$

Таким образом, при малых значениях B взаимодействие мало. Однако при больших значениях B вклад этого члена является преобладающим, что приводит к росту функции $G(B)$. Следовательно, при некотором значении $B = B(H)$ функция G достигает минимума [$B(H)$ — равновесное значение индукции в поле H].



Фиг. 27. Зависимость термодинамического потенциала $\mathcal{G}$ от индукции B.

Величина $B = n_L \phi_0$ характеризует число вихревых нитей, проходящих через 1 $см^2$ поверхности. Минимуму $\mathcal{G}$ соответствует равновесное значение индукции $B_e(H)$.



Фиг. 28. Экспериментальная кривая намагничивания сплава молибден — рений при $T = 0{,}522 T_c$ (Джойнер и Блоер [45]).

Для сравнения показаны две теоретические кривые намагничивания, рассчитанные Гудманом [34]; пунктирная кривая относится к ламинарной модели, сплошная — к модели с вихревыми нитями.

Теоретическая кривая $B(H) = H + 4\pi M(H)$ была рассчитана Гудманом [34, 35][1]). Результат показан на фиг. 28, где для сравнения приведены также экспериментальные данные для особо хорошо приготовленного сплава MoRe. По поводу имеющихся расхождений необходимо сделать ряд оговорок. Теоретическая кривая имеет бесконечный наклон при нижнем поле: $(\partial M/\partial H)_{H=H_{c1}} = \infty$. Физически это отражает тот факт, что отталкивание нитей носит экспоненциальный характер $\sim e^{-d/\lambda}$, т. е., грубо говоря, имеет конечный радиус действия порядка λ. Поэтому при полях, немного превышающих H_{c1}, в образце может возникнуть сравнительно много вихревых нитей, ибо это почти не вызовет увеличения энергии взаимодействия. Наоборот, наклон экспериментальных кривых $(\partial M/\partial H)_{H=H_{c1}}$ не очень велик. Это также не удивительно, так как в рассматриваемой области взаимодействие между нитями является слабым, в результате чего они легко могут „зацепляться" за всевозможные структурные дефекты. Тем не менее уже при полях, превосходящих H_{c1} на 10% или более, имеется хорошее согласие между теорией и экспериментом.

Аналогичная теоретическая кривая может быть построена для другой модели, в которой принимается, что поток переносится не вихревыми нитями, а слоями (см. задачу на стр. 75). Для больших расстояний d между слоями мы снова получим для энергии отталкивания экспоненциальную зависимость $\sim e^{-d/\lambda}$. Однако в этом случае индукция B пропорциональна не d^{-2}, как имеет место для решетки из нитей [см. (3.59)], а всего лишь d^{-1}. По этой причине намагниченность $M(H)$ при $H > H_{c1}$ в ламинарной модели убывает быстрее, чем в модели вихревых нитей. Теоретическая кривая для ламинарной модели также приведена на фиг. 28. Ясно, что модель вихревых нитей приводит к лучшему согласию с экспериментом. Впервые на этот факт обратил внимание Гудман [34].

Область $1/\lambda^2 \ll n_L \ll 1/\xi^2$

В этой области вихревые нити образуют решетку с довольно малым периодом, поэтому во взаимодействии участвуют и далекие соседи. Опишем способ вычисления энергии взаимодействия в таких случаях. Поле $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, направленное вдоль оси z, является решением уравнений

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h} = \phi_0 \sum_i \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \qquad \operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \tag{3.61}$$

где $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ — координаты i-й вихревой нити. Точки $\mathbf{r}_i$ образуют двумерную периодическую решетку. Введем фурье-компоненту $\mathbf{h}_\mathbf{l}$

[1]) См. аналогичный расчет для квадратной решетки в работе Абрикосова [33].— *Прим. ред.*

посредством преобразования

$$\mathbf{h}_{\mathbf{J}} = n_L \int\limits_{\text{ячейка}} \mathbf{h}(x_i,\ y_i)\, e^{i(J_x x + J_y y)}\, dx\, dy,$$

где интегрирование производится по основной ячейке. Вследствие периодичности функции $\mathbf{h}(x_i,\ y_i)$ фурье-компонента $\mathbf{h}_{\mathbf{J}}$ отлична от нуля лишь для векторов $\mathbf{J}$, кратных вектору обратной решетки. С помощью (3.61) находим

$$\mathbf{h}_{\mathbf{J}} = \frac{n_L \Phi_0}{1 + \lambda^2 J^2}. \tag{3.62}$$

Наконец, свободную энергию $\mathcal{F}$ можно представить в виде

$$\mathcal{F} = \int \frac{\mathbf{h}^2 + \lambda^2 (\operatorname{rot} \mathbf{h})^2}{8\pi}\, d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} \sum_{\mathbf{J}} h_{\mathbf{J}}^2 (1 + \lambda^2 J^2) =$$

$$= \frac{B^2}{8\pi} \sum_{\mathbf{J}} \frac{1}{1 + \lambda^2 J^2} = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \sum_{\mathbf{J} \neq 0} \frac{1}{1 + \lambda^2 J^2}. \tag{3.63}$$

В последней сумме минимальная величина вектора $\mathbf{J}$ составляет $\sim 1/d \sim \sqrt{n_L}$, т. е. в интересующей нас области, очевидно, $(\lambda J)^2 \sim n_L \lambda^2 \gg 1$. Следовательно, мы можем заменить $1/(1 + \lambda^2 J^2)$ на $1/\lambda^2 J^2$ и вычислить $\sum\limits_{\mathbf{J} \neq 0} 1/J^2$. Последняя сумма определяется исключительно свойствами конкретной выбранной решетки. Чтобы упростить дальнейший расчет, перейдем от суммы к интегралу

$$\sum_{\mathbf{J} \neq 0} \frac{1}{J^2} \to \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{n_L} \int \frac{dJ_x\, dJ_y}{J^2} \to \frac{1}{2\pi n_L} \int\limits_{J_{\text{мин}}}^{J_{\text{макс}}} \frac{J\, dJ}{J^2} = \frac{1}{2\pi n_L} \ln \left| \frac{J_{\text{макс}}}{J_{\text{мин}}} \right|,$$

где $J_{\text{мин}} \sim 1/d$ и $J_{\text{макс}} \sim 1/\xi$. (Фурье-компоненты с $J > J_{\text{макс}}$ должны быть исключены, поскольку они соответствуют пространственным изменениям поля на расстояниях, меньших толщины остова нити.) В итоге находим

$$\begin{aligned} F &= \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B}{4\pi} H_{c1} \frac{\ln(\beta d/\xi)}{\ln(\lambda/\xi)}, \\ G &= F - \frac{BH}{4\pi}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Фигурирующий здесь коэффициент β имеет порядок единицы; для треугольной решетки точный расчет [43] дает $\beta = 0{,}381$.

Зависимость $B(H)$ обычным образом получается из условия

$$\frac{\partial G}{\partial B} = 0.$$

Для треугольной решетки получим

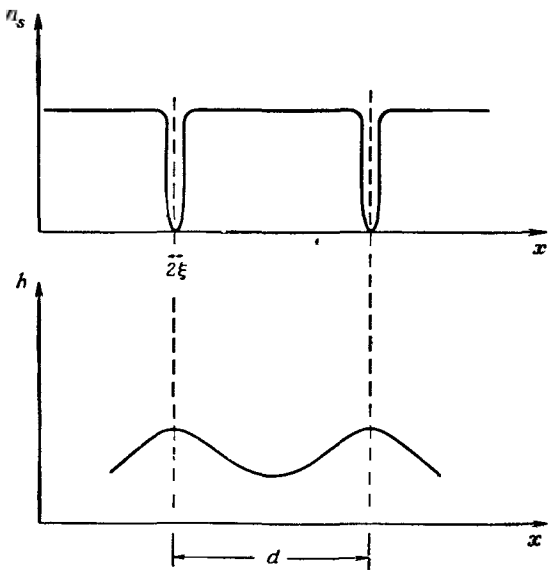
$$H = B + H_{c1}\frac{\ln(\beta' d/\xi)}{\ln(\lambda/\xi)}, \qquad (3.65)$$

где $\beta' = \beta e^{-1/2}$, а d и B связаны соотношением (3.59). Логарифмическая зависимость (3.65) находится в хорошем согласии с обратимыми кривыми намагничивания, получаемыми на опыте для материалов с $\lambda \gg \xi$.

Область $n_L \sim \xi^{-2}$

Здесь, как уже указывалось, используемая простая модель становится непригодной. Более строгий подход, в основе которого лежат уравнения Гинзбурга — Ландау, будет развит в гл. VI. Мы покажем, что верхнее поле H_{c2} имеет порядок ϕ_0/ξ^2. Физически это соответствует перекрытию остовов вихревых нитей ($n_L \sim \xi^{-2}$).

Задача. Вычислить потенциал Гиббса для ламинарной структуры. Результаты сравнить с ранее полученными для вихревого состояния.



Фиг. 29. Структура фазы Шубникова в ламинарной модели.

Тонкие (толщиной 2ξ) нормальные слои чередуются со сверхпроводящими. Нормальные слои отталкиваются друг от друга; радиус действия сил отталкивания равен глубине проникновения λ.

Решение. Ограничимся, как и прежде, предельным случаем $\lambda \gg \xi$. Ламинарная структура представляет собой систему тонких эквидистантно расположенных N-слоев. Обозначим через d период структуры и будем считать, что плоскости слоев перпендикулярны оси x (фиг. 29). Внутри N-слоев сверхпроводимость сильно подавлена, а в остальной части (области S) она

характеризуется обычным значением плотности сверхпроводящих электронов, равным n_s. Впервые такая модель была детально изучена Гудманом в 1961 г.

Поле $h(x)$ параллельно оси z и удовлетворяет уравнению Лондонов

$$h = \lambda^2 \frac{d^2h}{dx^2}$$

везде, за исключением очень узких N-слоев. Решение имеет вид

$$h(x) = H_m \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{ch} P},$$

где $P = d/2\lambda$, а H_m — магнитное поле внутри N-слоев.

Плотность свободной энергии в областях S, согласно (3.26), равна

$$F_1 = \frac{2}{d}\int_0^{d/2} \frac{h^2 + \lambda^2 (dh/dx)^2}{8\pi}\, dx = \frac{H_m^2}{8\pi}\frac{\operatorname{th} P}{P}.$$

К этому выражению необходимо добавить энергию (на 1 $см^3$) образования N-слоев

$$F_2 \approx \frac{H_c^2}{8\pi}\frac{2\xi}{d} = \frac{H_c^2}{8\pi}\frac{1}{P\varkappa},$$

где $\varkappa = \lambda/\xi$. Наконец, для получения плотности потенциала Гиббса мы должны учесть член

$$-\frac{BH}{4\pi} = -H\frac{H_m}{4\pi}\frac{\operatorname{th} P}{P}.$$

Таким образом,

$$G_{\text{ламин}} = \frac{1}{8\pi}\left(H_m^2\frac{\operatorname{th} P}{P} + \frac{H_c^2}{P\varkappa} - 2HH_m\frac{\operatorname{th} P}{P}\right).$$

Минимизируя выражение для G относительно H_m, находим, что при $H = H_m$

$$G_{\text{ламин}} = \frac{1}{8\pi P}\left(-H^2 \operatorname{th}^2 P + \frac{H_c^2}{\varkappa}\right).$$

Для $H < H_c/\sqrt{\varkappa}$ минимуму G соответствует бесконечно большое значение P (полный эффект Мейсснера); при $H > H_c/\sqrt{\varkappa}$ минимум достигается при конечных значениях P. Следовательно, нижнее поле в ламинарной модели равно $Hc/\sqrt{\varkappa}$. Для сравнения приведем результат, получающийся в модели вихревых нитей [см. (3.56)]

$$H_{c1} = \frac{\pi}{\sqrt{24}}\frac{\ln\varkappa}{\varkappa}H_c \quad \text{при } \varkappa \gg 1.$$

При $\varkappa \gg 1$ имеем $H_{c1} < H_c/\varkappa$. Из сказанного следует, что в интервале $H_{c1} < H < H_c/\sqrt{\varkappa}$

$$G_{\text{вихр}} < G_{\text{мейсснер}},$$

$$G_{\text{ламин}} = G_{\text{мейсснер}},$$

т. е.

$$G_{\text{вихр}} < G_{\text{ламин}}.$$

В области малых значений индукции энергетически более выгодным является вихревое состояние.

Аналогичное сравнение можно также провести для бо́льших значений поля H. Рассмотрим, например, область $H \sim H_c$. Для ламинарной модели в этой области величина P мала ($P \ll 1$). Полагая $\mathrm{th}\, P \approx P - P^3/3$, легко определить минимальное значение G

$$G_{\text{ламин}} = -\frac{H^2}{8\pi} + \left(\frac{3}{2\varkappa}\right)^{2/3} \frac{H_c^{4/3} H^{2/3}}{8\pi}.$$

С другой стороны, в модели вихревых нитей величина G, согласно (3.64) и (3.65), равна

$$G_{\text{вихр}} = -\frac{1}{8\pi}(H - H')^2,$$

$$H' = H_{c1} \frac{\ln(\lambda/d)}{\ln \varkappa} = \nu \frac{H_c}{\varkappa},$$

где ν — константа порядка единицы. При $T = 0$

$$\nu = \frac{\pi}{2\Lambda} \ln \frac{\lambda}{d}.$$

В интересующей нас области ($H' \ll H$)

$$G_{\text{вихр}} = -\frac{H^2}{8\pi} + \nu \frac{H H_c}{4\pi\varkappa}.$$

Следовательно,

$$\frac{G_{\text{ламин}} + (H^2/8\pi)}{G_{\text{вихр}} + (H^2/8\pi)} = \text{const} \left(\frac{\varkappa H_c}{H}\right)^{1/3}.$$

При $H < \varkappa H_c$ (величина $\varkappa H_c$, грубо говоря, совпадает со значением верхнего критического поля H_{c2}) имеем $G_{\text{ламин}} > G_{\text{вихр}}$. Таким образом, в области промежуточных и больших значений поля вихревое состояние по-прежнему является наиболее устойчивым [1]).

Задача. Обсудить равновесную кривую намагничивания для образца (сверхпроводник второго рода) в форме эллипсоида вращения в поле H_0, параллельном его продольной оси.

Р е ш е н и е. Исходными являются уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0.$$

Они допускают решение с постоянными значениями $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ внутри эллипсоида

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{H} B_e(H),$$

$$H = H_0 - NM = H_0 - N\frac{B - H}{4\pi};$$

здесь $B_e(H)$ — равновесное значение индукции для длинного цилиндра в продольном поле H, а N — размагничивающий фактор для эллипсоида. Отсюда находим связь между индукцией B и приложенным полем H_0

$$B = B_e\left[\frac{H_0 - (NB/4\pi)}{1 - (N/4\pi)}\right].$$

---

[1]) Если поле H близко к H_{c2}, использованный выше элементарный подход недостаточен. Позднее мы вернемся к изучению этой области полей с помощью уравнений Гинзбурга — Ландау.

Очевидно, индукция B отлична от нуля лишь для полей $H_0 > H_{c1}$ $(1 - N/4\pi)$; величина наклона $(dB/dH_0)_{B=0}$ конечна и равна $4\pi/N$. Верхнее критическое поле остается равным H_{c2}, поскольку при фазовом переходе второго рода $B(H_{c2}) = H_{c2}$.

Задача. Обсудить рассеяние медленных нейтронов на периодической решетке вихревых нитей в сверхпроводнике [46, 47].

Р е ш е н и е. Взаимодействие нейтрона с вихревой нитью имеет вид $\mu_n h(\mathbf{r})$, где $\mu_n = 1{,}91e\hbar/Mc$ — магнитный момент нейтрона, а M — его масса. Рассмотрим акт рассеяния, при котором импульс нейтрона изменяется от $\hbar\mathbf{k}_0$ до $\hbar(\mathbf{k}_0 + \mathbf{q})$. Соответствующая амплитуда рассеяния в борновском приближении равна

$$a = \frac{M}{2\pi\hbar^2}\int \mu_n h(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}.$$

Это выражение отлично от нуля лишь при $\mathbf{q} = \mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ — любой вектор обратной решетки для (двумерной) „решетки нитей". Согласно (3.62),

$$\int h(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r} = \frac{BV}{1+\lambda^2 J^2} = \frac{n_L \Phi_0 V}{1+\lambda^2 J^2},$$

где V — объем образца, n_L — плотность нитей. Следовательно,

$$a_J = 1{,}91\,\frac{1}{2}\,\frac{n_L V}{1+(\lambda J)^2}.$$

Для треугольной решетки нитей $n_L = 2/\sqrt{3}\, d^2$, т. е. первому брэгговскому отражению отвечает $J = 4\pi/\sqrt{3}\, d$ (d — расстояние между ближайшими соседями). Полагая $B = 2000$ *гс* ($n_L \sim 10^{10}$), находим $d \sim 10^3$ Å, $J \sim 6{,}7 \cdot 10^5$ *см*$^{-1}$; для $\lambda = 1000$ Å это соответствует $(\lambda J)^2 \approx 45 \gg 1$. Оценим значение амплитуды рассеяния в расчете на один атом (величина, с которой обычно имеет дело экспериментатор). Подставляя вместо V атомный объем (~ 30 Å^3), получаем $a \approx 0{,}7 \cdot 10^{-13}$ *см*; соответствующее „сечение когерентного рассеяния" имеет малую (но измеримую) величину $4\pi a^2 \approx 5 \cdot 10^{-28}$ *см*$^2 = 0{,}5$ *мбарн*.

Для первого отражения угол рассеяния θ очень мал:

$$\theta \approx \frac{J}{k_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\lambda_n}{d},$$

где $\lambda_n = 2\pi/k_0$ — длина волны нейтрона. При использовании тепловых нейтронов λ_n может достигать в лучшем случае ~ 5 Å. Для приведенного примера это дает угол $\theta \sim 6 \cdot 10^{-3}$ *рад* ($= 20'$). Измерения на металлическом Nb были проведены Крибье и др. [46] [1]). Из-за наличия множителя $[1 + (\lambda J)^2]^{-1}$ в выражении для амплитуды рассеяния a им удалось наблюдать лишь первое отражение (с наименьшим значением J). Результаты показаны на фиг. 30.

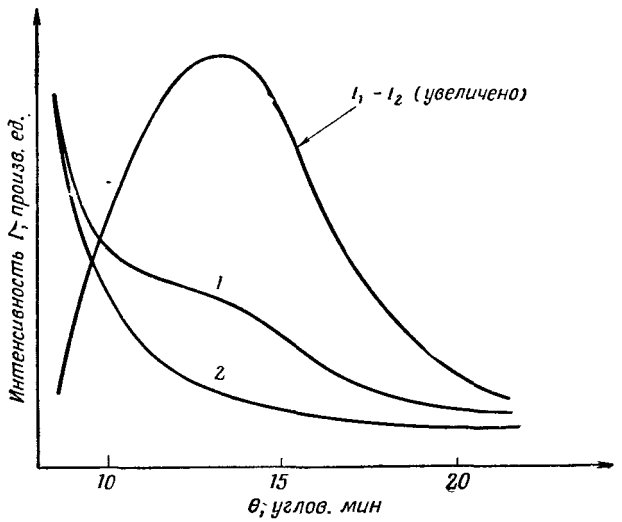
Задача. Рассчитать уширение линии ядерного магнитного резонанса, вызванное неоднородностью поля в случае вихревого состояния [48] [2]).

---

[1]) Недавно решетку вихревых нитей удалось наблюдать непосредственно с помощью порошкового метода; см. [136]. — *Прим. ред.*

[2]) Независимо аналогичный расчет был выполнен Шмидтом [49]. — *Прим. ред.*

Р е ш е н и е. В области промежуточных значений поля $H_{c1} \ll H \ll H_{c2}$ вихревые нити образуют плотную решетку, распределение поля в которой можно описывать с помощью компонент Фурье [см. (3.62)]. Форма линии ядерного резонанса определяется, вообще говоря, всеми моментами распределения поля (при условии, конечно, что неоднородность поля является единственным источником уширения). Однако, часто на опыте „аномальные"



Ф и г. 30. Угловая диаграмма для рассеяния нейтронов решеткой вихревых нитей в металлическом ниобии при $T = 4{,}2°$ К. (По данным Крибье.)

Кривая *1* получена при $H = 1640$ *гс*, кривая *2* — при $H = 4100$ *гс* ($> H_{c2}$).

боковые максимумы не наблюдаются [50]. В этом случае для определения ширины центрального пика достаточно знать второй момент (см., например, [51]). Именно, ширина линии равна

$$\Delta H = (\langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2)^{1/2},$$

где $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по пространству. Член $\langle h \rangle$ просто равен $B = n_L \phi_0$; член $\langle h^2 \rangle$ легко рассчитать с помощью (3.62)

$$\langle h^2 \rangle = \frac{1}{S} \int h^2(\mathbf{r})\, d\sigma = \sum_J h_J h_{-J} = n_L^2 \phi_0^2 \sum_J \frac{1}{[1+(\lambda J)^2]^2},$$

где S — площадь сечения образца плоскостью, перпендикулярной полю. Заменяя, как раньше [см. обсуждение формулы (3.63)], сумму по векторам обратной решетки интегралом, находим

$$\Delta H = \frac{B}{\sqrt{4\pi}} \frac{d}{\lambda} \left[1 + \left(\frac{2\pi\lambda}{d}\right)^2\right]^{-1/2},$$

где для простоты мы предположили, что решетка нитей является квадратной. Полученный результат справедлив при условии, что $d \gg \xi$.

В области промежуточных полей ($d \ll \lambda$) эта формула дает

$$\Delta H \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\phi_0}{(2\pi)^{3/2}\lambda^2}.$$

Отметим, что ширина линии по порядку величины равна H_{c1} (для V_3Ga, например, $\lambda \sim 2000$Å, $\Delta H \approx 20$ *гс*) и почти не зависит от поля вплоть до полей $\sim H_{c2}$; при $H = H_{c2}$ уширение, вызванное неоднородностью поля, исчезает совсем. Для полей, близких к H_{c1} ($d \gtrsim \lambda$), уширение становится сильнее. Более детальный расчет формы линии, основанный на (3.62), выполнен Матриконом.

Задача. Вихревая нить расположена параллельно плоской границе образца. Вычислить ее энергию во внешнем поле H.

Решение. Выберем систему декартовых координат так, чтобы ось z совпадала с направлением нити (и поля), а плоскость yz — с поверхностью образца (сверхпроводник занимает полупространство $x \geqslant 0$). Распределение поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ описывается уравнением

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h} = \phi_0 \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L),$$

где $\mathbf{r}_L = (x_L, 0)$ — точка пересечения нити с плоскостью $z = 0$ („координата" нити); вектор ϕ_0 направлен вдоль оси z. Граничные условия на поверхности образца имеют вид

$$\mathbf{h} = \mathbf{H}$$

и

$$(\operatorname{rot}\mathbf{h})_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0;$$

второе условие, очевидно, следует из равенства нулю нормальной к поверхности компоненты тока.

Решение $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ будем искать в виде

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2.$$

Член $\mathbf{h}_1 = \mathbf{H}\exp(-x/\lambda_L)$ определяет проникновение в образец внешнего поля в отсутствие вихревой нити. Напротив, поле $\mathbf{h}_2$ всецело связано с наличием нити и может быть найдено методом изображений. Суть метода состоит в добавлении в точке $(-x_L, 0)$ фиктивной вихревой нити, которая является зеркальным изображением исходной нити $(x_L, 0)$ и в которой кольцевые токи текут в противоположном направлении; поле $\mathbf{h}_2$ равно алгебраической сумме полей, вызванных каждой нитью в отдельности. Легко проверить, что найденное таким образом поле $\mathbf{h}_2$ автоматически обращается в нуль на границе $x = 0$. Следовательно, мы нашли поле, удовлетворяющее исходному уравнению и обоим граничным условиям.

Зная $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, мы вычислим теперь термодинамический потенциал

$$\mathcal{G} = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\mathbf{h}^2 + \lambda^2 (\operatorname{rot}\mathbf{h})^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{h}\cdot\mathbf{H}}{4\pi}\right].$$

Написанный здесь интеграл берется по всему объему образца ($x \geqslant 0$), за исключением области, занимаемой „остовом" нити. Последний член в подынтегральном выражении представляет собой микроскопический аналог обычного слагаемого $-\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}/4\pi$, фигурирующего при феноменологическом описании. Преобразуя выражение для $\mathcal{G}$ в поверхностный интеграл и используя уравнение Лондонов для $\mathbf{h}$, находим

$$\mathcal{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int\limits_{S'+S''} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{h} - \mathbf{H}\right) \times \operatorname{rot}\mathbf{h},$$

где поверхность интегрирования $S' + S''$ состоит из поверхности остова (S') и поверхности образца (S''). Соответствующие вклады в $\mathcal{G}$ обозначим че-

рез $\mathscr{G}'$ и $\mathscr{G}''$. Как обычно, в пределе $\xi \to 0$ основной вклад в интеграл по S' дает расходящийся член в rot h [см. (3.33)]; в результате получаем

$$\mathscr{G}' = \frac{\phi_0}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\,h(\mathbf{r}_L) - H\right].$$

Вклад $\mathscr{G}''$ можно записать в виде

$$\mathscr{G}'' = \frac{\lambda^2}{8\pi}\int\limits_{S''} d\sigma \cdot (\mathbf{h}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{h}),$$

поскольку на поверхности образца поле равно $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 = \mathbf{H}$. Произведем разбиение $\operatorname{rot} \mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{h}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{h}_2$ и выделим в $\mathscr{G}''$ вклад от выражения $\mathbf{h}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{h}_1$. Он представляет собой энергию в отсутствие нити, т. е. аддитивную постоянную, которой мы в дальнейшем будем пренебрегать. Остающийся член дает

$$\mathscr{G}'' = \frac{\lambda^2}{8\pi}\int\limits_{S''} d\sigma \cdot (\mathbf{h}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{h}_2).$$

Перепишем этот интеграл в виде

$$\int\limits_{S''} = \int\limits_{S'+S''} - \int\limits_{S'},$$

тогда, используя для поля h (вне остова нити) уравнение Лондонов, легко видеть, что

$$\int\limits_{S'+S''} d\sigma \cdot (\mathbf{h}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{h}_2) = \int\limits_{S'+S''} d\sigma \cdot (\mathbf{h}_2 \times \operatorname{rot} \mathbf{h}_1).$$

Поскольку на поверхности S' поле $\mathbf{h}_1$ не имеет особенности, вклад этой области в написанный интеграл пренебрежимо мал при $\xi \to 0$. Аналогично равен нулю интеграл по поверхности S'' в силу граничного условия $(h_2)_{x=0} = 0$. С учетом сказанного находим

$$\mathscr{G}'' = \frac{\lambda^2}{8\pi}\int\limits_{S'} d\sigma \cdot (\mathbf{h}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{h}_2) = \frac{\phi_0 h_1(\mathbf{r}_L)}{8\pi}$$

и

$$\mathscr{G} = \frac{\phi_0}{4\pi}\left[He^{-x_L/\lambda} + \frac{1}{2}\,h_2(\mathbf{r}_L) - H\right].$$

Заметим попутно, что $\mathscr{G} = 0$, когда нить находится на самой поверхности ($x_L = 0$), поскольку $h_2(x = 0) = 0$.

Как вначале было установлено, поле $h_2(\mathbf{r}_L)$ является суммой двух полей, первое из которых создается непосредственно самой нитью, а второе — ее зеркальным изображением. Первое слагаемое при подстановке в выражение для $\mathscr{G}$ дает собственную энергию изолированной нити

$$\mathscr{J} = \frac{\phi_0 H_{c1}}{4\pi},$$

а второе описывает притяжение между нитью и изображением

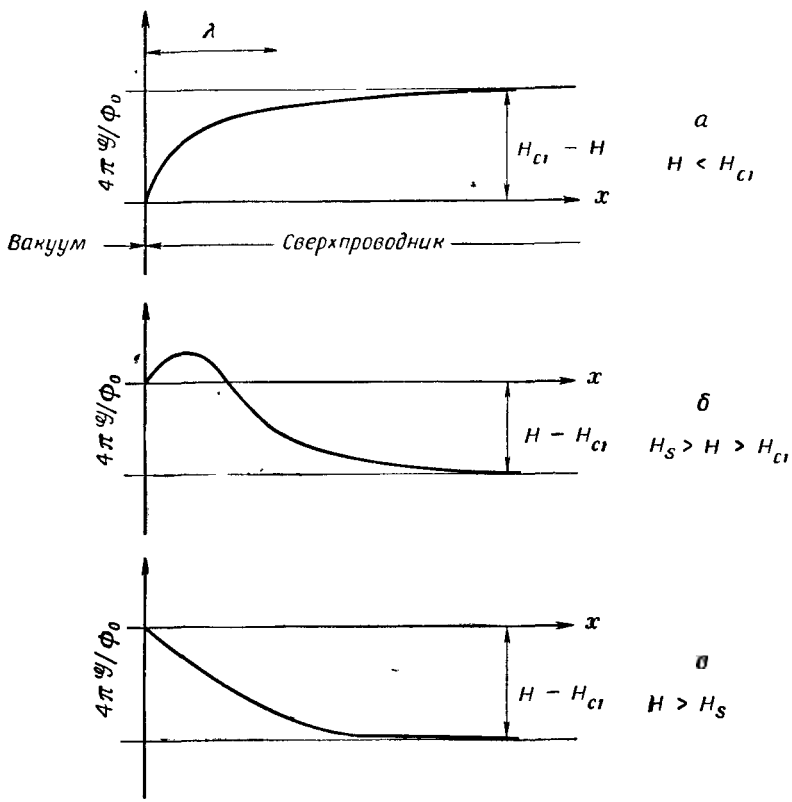
$$-\frac{\phi_0}{8\pi}\,h(2x_L),$$

где $h(r)$ — величина поля на расстоянии r от нити [см. (3.35)]. Окончательно

$$\mathscr{G} = \frac{\phi_0}{4\pi}\left[He^{-x_L/\lambda} - \frac{1}{2}\,h(2x_L) + H_{c1} - H\right].$$

Обсуждение

1. **Член** $(\phi_0 H/4\pi)\exp(-x_L/\lambda)$ описывает взаимодействие вихревой нити с внешним полем и связанными с ним экранирующими токами. По своему виду этот член вполне аналогичен выражению (3.50) и соответствует отталкиванию.



Фиг. 31. Поверхностный барьер, препятствующий вхождению вихревых нитей в сверхпроводник второго рода.

а — поле H меньше H_{c1}; на вихревую нить действует сила, направленная наружу; внутри (идеального) образца вихревых нитей нет.

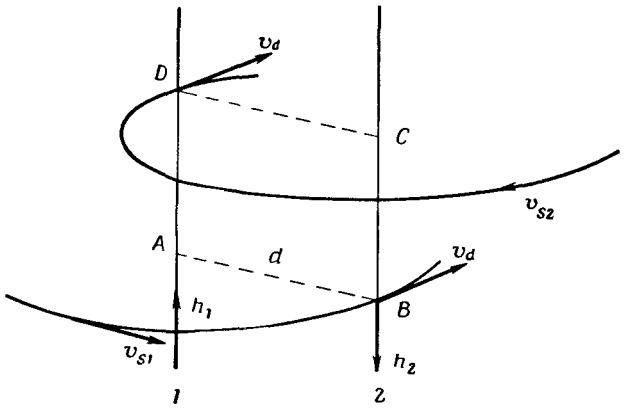
б — поле лежит в интервале между H_s и H_{c1}; проникновение нити в глубь образца сопровождается выигрышем энергии $(\phi_0/4\pi)(H-H_{c1})$. Однако из-за наличия барьера вблизи поверхности образца (которая предполагается достаточно чистой) проникновения не происходит.

в — поле H больше H_s; барьер отсутствует.

2. Член $-\phi_0 h(2x_L)/8\pi$ описывает притяжение между вихревой нитью и ее изображением. Этот член отличается от (3.50) множителем, равным $^1/_2$. Тем не менее выражение для силы притяжения сохраняет прежний вид $\phi_0 j/c$ [см. (3.52)], поскольку производная от $h(2x_L)$ по x_L дает недостающий множитель 2.

3. Вид функции $\mathcal{G}(x_L)$ для различных значений приложенного поля H показан на фиг. 31, *а — в*. Отсюда ясно, что при полях $H \sim H_{c1}$ имеется высокий барьер, препятствующий вхождению нитей в образец. Происхождение барьера легко понять. Пусть $H = H_{c1}$, при этом $\mathcal{G}(x_L = 0) = \mathcal{G}(x_L = \infty) = 0$. На больших расстояниях x_L энергия отталкивания $[\sim \exp(-x_L/\lambda)]$, очевидно, превышает энергию притяжения $[\sim \exp(-2x_L/\lambda)]$, поэтому $\mathcal{G} > 0$ и возникает барьер. Однако в сильных полях $H > H_s = \phi_0/4\pi\lambda\xi$ барьер исчезает (фиг. 31, *в*); при этом, как можно видеть из выражения для $\mathcal{G}$, наклон $(\partial\mathcal{G}/\partial x_L)_{x_L=\xi}$ становится отрицательным [1]).

Из сказанного следует важный вывод, что в полях $H < H_s$ нити не могут входить в образец с идеальной поверхностью (хотя при $H > H_{c1}$ это термодинамически выгодно). Впервые на существование поверхностного барьера независимо указали Бин и Ливингстон [53] и группа авторов, работающих в Орсэ (см. [54]). Экспериментально наличие барьера на поверхности сверхпроводника наблюдалось в сплавах свинец — таллий [55] и в металлическом ниобии [56]. Главное требование к образцам состоит в том, чтобы поверхность была достаточно хорошей (на расстояниях порядка λ).



Фиг. 32. Взаимное движение двух «антипараллельных» вихревых нитей в чистом сверхпроводнике второго рода.

Через v_{s1} (v_{s2}) обозначена сверхтекучая скорость, обусловленная наличием нити 1 (2). При показанной геометрии обе нити движутся с одной и той же скоростью v_d, направленной перпендикулярно плоскости *ABCD*.

Движение вихревых нитей

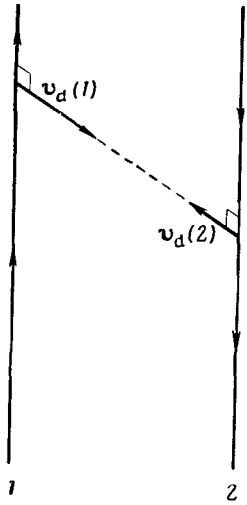
Рассмотрим две „антипараллельные" вихревые нити, показанные на фиг. 32. Согласно (3.50), между ними действует сила притяжения. Будут ли нити двигаться под действием этой силы или оста-

[1]) Позже с помощью микроскопического рассмотрения мы покажем, что введенное здесь поле H_s совпадает по порядку величины с термодинамическим критическим полем H_c.

ваться неподвижными? Этот вопрос широко обсуждался в последнее время. Мое личное мнение состоит в том, что в *чистом металле* каждая из нитей должна дрейфовать в поле скоростей, создаваемых другой нитью. Точнее говоря, обе нити будут двигаться под прямым углом к соединяющей их плоскости, причем

$$v_d = v_{12}, \tag{3.66}$$

где v_{12} — „сверхтекучая" скорость, создаваемая нитью 1 в точках расположения нити 2. Такой дрейф должен привести к любопытной картине коллективных колебаний в системе вихревых нитей для очень чистых сверхпроводников второго рода [57].



Фиг. 33. Движение двух «антипараллельных» вихревых нитей в «*грязном*» сверхпроводнике второго рода.

Нити движутся навстречу друг другу со скоростью, определяющейся трением о решетку.

Наоборот, в *грязных* сверхпроводниках характер движения нитей в основном определяется их трением о решетку, так что две антипараллельные нити 1 и 2 будут перемещаться навстречу друг другу (фиг. 33) со скоростями

$$v_d(2) = -v_d(1) = \frac{f}{\eta}. \tag{3.67}$$

Здесь f — сила притяжения между нитями, описываемая выражением (3.52); η — коэффициент вязкости. Чтобы оценить величину η, предположим, что остов нити 2 не меняет распределения токов, созданное нитью 1. Иными словами, мы предполагаем, что в области нормального остова нитей плотность тока дается прежним выражением $j = nev_{12}$. Это приводит к возникновению тепловых потерь, мощность которых (на единицу длины нити 2) равна

$$W = \frac{j^2}{\pi\sigma\xi^2},$$

где $\sigma = ne^2\tau/m$ — проводимость в нормальном состоянии, ξ — радиус остова нити. Эта диссипируемая мощность должна быть приравнена совершенной за единицу времени работе

$$fv_d(2) = \frac{f^2}{\eta}.$$

Вспоминая, что, согласно (3.52),

$$f = \frac{1}{2}nh v_{12},$$

в результате находим

$$\eta = \frac{n\varkappa\hbar^2}{4\pi m\xi^2}. \tag{3.68}$$

Этот механизм потерь позволяет разумно описать наблюдавшееся в опытах Кима и др. [58] вязкое движение вихревых нитей в грязных сверхпроводниках.

§ 3. НЕРАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА

До настоящего момента мы изучали *обратимое* поведение сверхпроводников второго рода. В частности, мы пришли к важному заключению, что для материалов с малой длиной когерентности ξ сверхпроводимость сохраняется вплоть до очень больших значений поля $\sim H_{c2} \sim \phi_0/\xi^2$.

С точки зрения технических применений наибольший интерес представляет получение сверхпроводящей проволоки, способной нести большой ток. Однако состояние с большим током не является термодинамически равновесным, как видно из следующего. В самом деле, рассмотрим провод кругового сечения радиусом a, по которому течет ток I. (Когда ток I мал, он почти весь течет в слое толщиной λ вблизи поверхности провода.) Поле на поверхности провода равно

$$H = \frac{2I}{ca}. \tag{3.69}$$

Токовое состояние является устойчивым, если $H < H_{c1}$. Напротив, при $H > H_{c1}$ в сверхпроводнике начинают образовываться замкнутые вихревые нити в виде колец (в соответствии с формой силовых линий магнитного поля). В момент зарождения на поверхности провода вихревое кольцо имеет радиус a, но в последующие моменты времени оно стремится сжаться (уменьшая тем самым линейную энергию), пока, наконец, не исчезнет на оси провода. Очевидно, этот процесс сопровождается диссипацией энергии. Иными словами, в идеальном образце сопротивление отсутствует лишь при полях $H < H_{c1}$, т. е. для токов $I < caH_{c1}/2$. Чтобы иметь возможность пропускать по проводу токи большей величины, необходимо каким-то способом *приостановить* движение вихревых колец. Такое „закрепление“ вихревых нитей на практике осуществляется путем создания подходящих для этой цели дефектов решетки, т. е. осуществления неравновесных ситуаций. В то время как поле H_{c2} является характерным свойством, присущим данному металлу или сплаву, измеряемый на проволоке критический ток сильно зависит от способа металлургической обработки данного образца. На различную природу H_{c2} и $I_{кр}$ впервые обратил внимание Гортер.

На практике благоприятные дефекты структуры получают следующими способами:

1. Неполным спеканием образца (например, Nb_3Sn).
2. Путем холодной обработки (например, сплавы MoRe).
3. С помощью быстрой кристаллизации раствора (например, сплавы на основе свинца).

Получаемые таким образом материалы обладают высокими значениями критического тока и носят название *жестких сверхпроводников*.

В настоящее время имеются лишь смутные догадки относительно механизмов взаимодействия вихревых нитей с дефектами структуры. Сравнительно прост случай, когда в сверхпроводящем материале имеются только большие полости, образовавшиеся, например, в процессе спекания. Естественно думать, что вихревые нити в этом случае будут прилипать к границам полостей, поскольку это отвечает меньшей длине нитей в сверхпроводящем материале и, следовательно, меньшему значению энергии. Что касается механических напряжений, получающихся при холодной обработке, то они могут привести к некоторым (по всей вероятности, малым) локальным изменениям энергии конденсации и плотности сверхпроводящих электронов n_s. Это в свою очередь должно вызывать локальные изменения параметров λ и ξ и соответственно собственной энергии $\mathcal{J}$ вихревых нитей и их взаимодействий U. В целом вся картина носит очень сложный характер, и в последующем мы ограничимся только феноменологическим описанием возникающих эффектов.

Критическое состояние при абсолютном нуле

Рассмотрим жесткий сверхпроводник, находящийся во внешнем магнитном поле H, направленном вдоль оси z. В состоянии термодинамического равновесия плотность вихревых нитей одинакова во всех точках образца и равна $B(H)/\phi_0$. Обратимся теперь к метастабильному случаю, когда индукция $B \neq B(H)$ меняется от точки к точке, скажем, вдоль оси x. Тогда 1) плотность нитей непостоянна в пространстве и 2) вдоль оси y течет макроскопический ток с плотностью

$$J = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Силы, действующие в системе нитей, можно разбить на две группы. Прежде всего силы отталкивания между нитями; под их влиянием области с повышенной плотностью нитей (большие значения индукции B) имеют тенденцию расширяться за счет областей с меньшей плотностью нитей. Этот эффект можно описать путем введения давле-

ния p в рассматриваемой двумерной системе нитей[1]). Тогда сила, действующая на единицу объема, равна $-\partial p/\partial x$. С другой стороны, движению нитей препятствует „зацепление" последних за структурные дефекты. Величина сил зацепления не может принимать сколь угодно большие значения, а ограничена определенным пороговым значением α_m. Необходимым условием механического равновесия является выполнение неравенства

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \leqslant \alpha_m. \tag{3.70}$$

Если в некоторой точке образца $|\partial p/\partial x| > \alpha_m$, то начнется перемещение вихревых нитей, сопровождающееся диссипацией энергии; оно будет продолжаться до тех пор, пока снова не будет выполнено условие (3.70). В реальных ситуациях автоматически устанавливается такая плотность нитей $B(x)/\phi_0$, чтобы пороговое условие [знак равенства в формуле (3.70)] выполнялось во всех точках образца. Такое состояние сверхпроводника впервые было рассмотрено Бином [59, 60] и получило название *критического состояния*. Наглядное представление о критическом состоянии дает аналогия с песчаным холмом. Если крутизна спуска холма превышает некоторое критическое значение, песок начнет скатываться вниз — возникает лавина. Эта картина очень близка к той, которая имеет место в жестких сверхпроводниках; в тщательных опытах (с использованием регистрирующих катушек) было показано, что в закритическом режиме вихревые нити начинают двигаться не поодиночке, а в форме лавин, включающих до 50 и более нитей.

Чтобы воспользоваться условием (3.70), перейдем теперь к явному вычислению давления p в системе нитей. Рассмотрим группу из N нитей, пересекающих плоскость xy на участке площадью S. Энергия нитей (на единицу длины вдоль оси z) равна

$$\mathcal{G} = NG,$$

где G для одной нити определяется выражением (3.64). Давление p представляет собой частную производную от потенциала $\mathcal{G}$ по площади S (т. е. по „объему") при заданном значении N

$$p = -\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial S}\right)_N = -G - S\frac{\partial G}{\partial S}.$$

Вместе с тем при фиксированном значениии N, очевидно,

$$\frac{dS}{S} = -\frac{dB}{B},$$

[1]) Вообще говоря, при таком подходе нужно исходить из тензора энергии — импульса p_{ik}. Здесь мы ограничимся изотропным приближением и пренебрежем тензорными свойствами величины p.

поэтому

$$p = -G + B\frac{\partial G}{\partial B}. \tag{3.71}$$

Таким образом, зная G, мы можем найти зависимость $p(B)$, т. е. связь давления с плотностью нитей. Интересующий нас градиент давления $\partial p/\partial x$ можно представить в довольно простом виде. Положим для этого

$$G(B) = F(B) - \frac{BH}{4\pi},$$

где функция $F(B)$ определяет собственную энергию нитей и энергию их взаимодействия. Равновесные значения $B(H)$ и $H(B)$ находятся из условия $(\partial G/\partial B) = 0$. Например,

$$H(B) = 4\pi\frac{\partial F}{\partial B}.$$

С учетом сказанного получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= B\frac{\partial^2 G}{\partial B^2}\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{B}{4\pi}\frac{\partial H(B)}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{B}{4\pi}\frac{\partial H(B)}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Если функция $H(B)$ известна, то мы можем сразу же вычислить градиент давления как функцию B и $\partial B/\partial x$.

Для сверхпроводников второго рода ($H_{c1} \ll H_{c2}$) функция $H(B)$ при $H \gg H_{c1}$ приближенно равна B, как ясно из вида кривой намагничивания (см. фиг. 23). В этой области имеем просто

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{B}{4\pi}\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{BJ_y}{c}. \tag{3.72'}$$

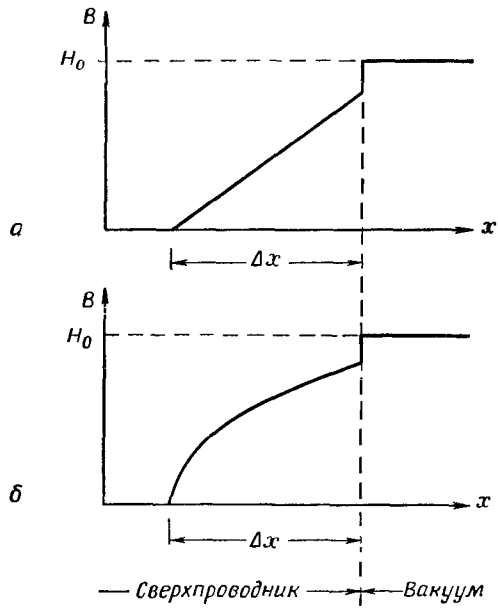
Соответственно условие критического состояния запишется в виде

$$\left|\frac{B}{4\pi}\frac{\partial B}{\partial x}\right| = \left|\frac{BJ_y}{c}\right| = \alpha_m \quad \text{при} \quad H(B) \gg H_{c1}. \tag{3.73}$$

Для вычисления $B(x)$ в критическом состоянии необходимо знать зависимость максимальной силы „зацепления“ α_m от величины индукции B (т. е. от плотности нитей). Первоначально Бин предположил, что зависимость α_m от B является линейной. Это приводит к постоянной величине плотности тока J_y (обычно $\sim 10^5$ *а/см*^{2}) в критическом состоянии. В дальнейшем Ким и др. [61] с помощью серии экспериментов показали, что для сплавов NbZr и Nb_3Sn (подвергнутых специальной металлургической обработке) в области полей $\lesssim 10^4$ *гс* достаточно хорошим является предположение о *независимости* α_m от B. К сожалению, этот простой результат до сих пор не получил полного теоретического объяснения. Напротив, казалось бы, влияние

центров зацепления должно быть наиболее сильным в том случае, когда их размеры сравнимы с расстоянием между нитями, а это последнее зависит от B (как $B^{-1/2}$).

Форма профиля $B(x)$ в критическом состоянии для моделей Бина и Кима показана на фиг. 34. Для типичных жестких сверхпроводников в приложенном поле порядка 10^4 *гс* полная толщина Δx области проникновения силовых линий составляет ~ 1 *мм*. Простейший



Фиг. 34. Необратимое проникновение магнитного потока в жесткий сверхпроводник.

а — модель Бина; *б* — модель Кима — Андерсона (параболический профиль).

метод экспериментального определения зависимости $B(x)$ [или $\alpha_m(B)$] состоит в измерении потока ϕ, заключенного в цилиндрическом образце радиусом R (фиг. 35), во внешнем поле H, растущем со временем.

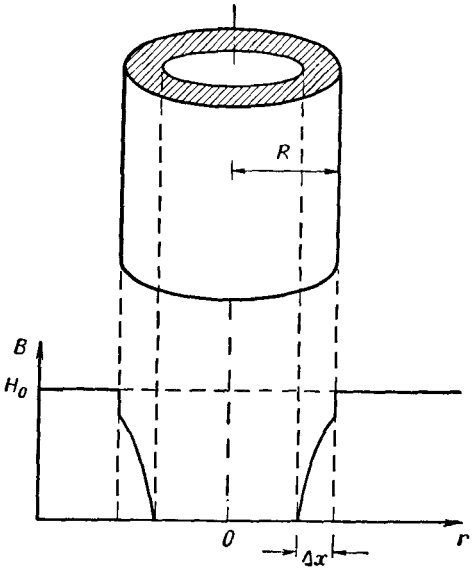
1. Если $R \ll \Delta x$, то индукция почти однородна по всему образцу; $B = B(H)$, $\phi = \pi R^2 B(H)$ [1]).

[1]) Мы предполагаем, что поверхностный барьер, препятствующий вхождению вихревых нитей в цилиндр, отсутствует. Поверхностный барьер иногда играет роль, однако его влияние можно легко отделить.

2. Если $R \gg \Delta x$, мы практически имеем одномерный случай. Обозначим через x расстояние, отсчитываемое от центра по радиусу цилиндра; тогда

$$\phi = 2\pi R \int_{R-\Delta x}^{R} B(x)\,dx. \tag{3.74}$$

На границе области проникновения потока ($x = R - \Delta x$) индукция B обращается в нуль [$B = 0$, $H(B) = H_{c1}$]; на поверхности цилиндра



Фиг. 35. Проникновение магнитного поля H_0, растущего со временем, в цилиндрический образец.

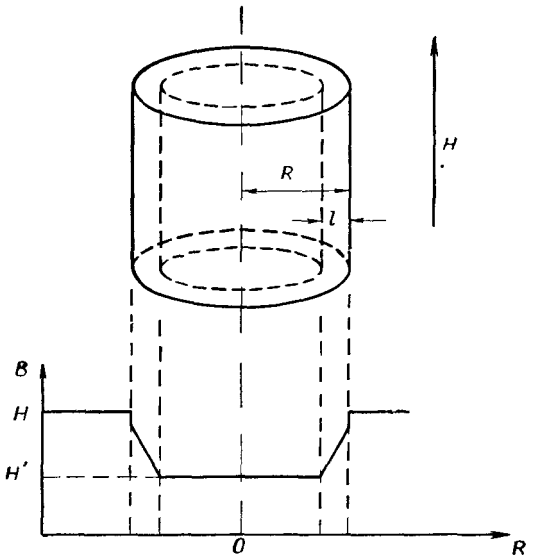
Силовые линии проникают только в заштрихованную область.

$x = R$ (снова считаем, что поверхностный барьер отсутствует) равновесное значение индукции B определяется приложенным полем: $B = B(H)$. Переходя в (3.74) к интегрированию по H и используя равенства (3.72) и (3.70), находим

$$\phi = 2\pi R \int_{H_{c1}}^{H} \frac{B^2(H)}{4\pi\alpha_{mH}}\,dH, \qquad \alpha_{mH} \equiv \alpha_m[B(H)].$$

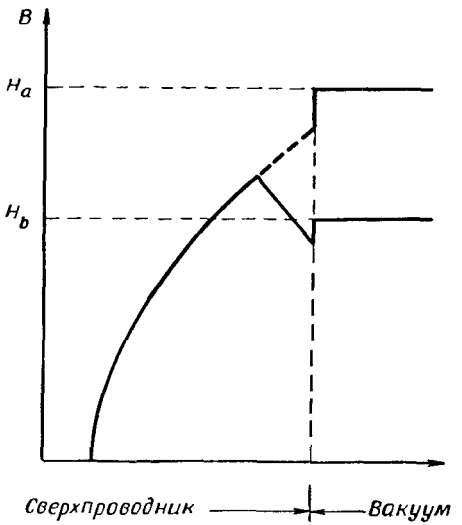
Особый интерес представляет производная

$$\frac{d\phi}{dH} = \frac{R}{2}\,\frac{B^2(H)}{\alpha_{mH}}. \tag{3.75}$$



Фиг. 36. Принципиальная схема опытов на полых цилиндрах, изготовленных из жестких сверхпроводников.

Приложенное поле равно H; измеряется поле H' в полой части цилиндра.



Фиг. 37. Распределение индукции B внутри жесткого сверхпроводника, находящегося в переменном во времени внешнем магнитном поле H.

Пунктирная и сплошная кривые дают соответственно распределение индукции при начальном возрастании поля до значения H_a и последующем его уменьшении до H_b.

Таким образом, измерив намагниченность в возрастающем поле, мы можем вычислить значения α_{mH} и $\alpha_m(B)$.

Другой метод, использованный Кимом и сотрудниками, состоит в измерении поля H' внутри *полого* цилиндра в продольном внешнем поле H (фиг. 36). При начальном увеличении поля H (от нулевого значения) поле H' остается строго равным нулю. Затем, когда фронт потока достигает внутренней поверхности цилиндра, поле H' также начинает возрастать (в идеальном случае поле H' должно скачком увеличиться до значения H_{c1}, а потом расти непрерывно). С помощью этого метода можно непосредственно измерить величину Δx (равную толщине стенки цилиндра), фиксируя значение H, при котором поле H' начинает возрастать.

Более сложная картина возникает, когда поле H циклически то увеличивается, то уменьшается со временем (фиг. 37). При этом в различные циклы производная $\partial B/\partial x$ может быть как положительной, так и отрицательной, но абсолютная величина $|\partial p/\partial x|$ всегда остается равной α_m. Детальный расчет гистерезисных циклов можно произвести, если известна зависимость $\alpha_m(B)$.

Движение вихревых нитей при $T \neq 0$

При конечных температурах вихревая нить с некоторой вероятностью может скачком преодолеть барьер, создаваемый центром „зацепления". Если при этом градиент давления отличен от нуля ($\partial p/\partial x \neq 0$), то вихревые линии будут перемещаться в области с меньшим значением B. Обозначим среднюю скорость перемещения нитей вдоль оси x через v_x. Для регистрации такого движения (или „крипа") можно использовать следующие методы:

1. Магнитные измерения на сплошных или полых цилиндрах. Например, в последнем случае, если поле H увеличивается от нуля до определенной величины, то поле H', измеряемое внутри цилиндра, будет медленно возрастать со временем.

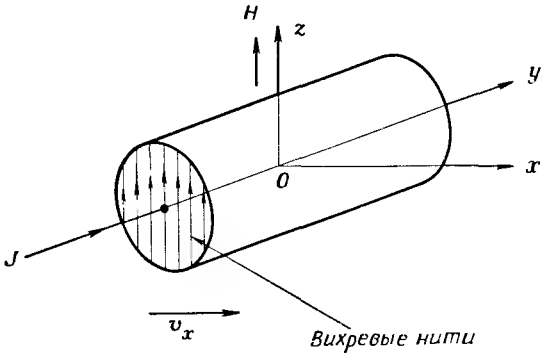
2. Электрические измерения. При перемещении вихревых нитей возникает электродвижущая сила, которую можно непосредственно измерить. Простейший случай показан на фиг. 38; по проволоке, помещенной в магнитном поле H (вдоль оси z), пропускают ток с плотностью J (вдоль оси y). Вихревые нити направлены вдоль оси z. Поскольку производная $\partial B/\partial x = 4\pi J/c$ отлична от нуля, то нити начнут перемещаться вдоль оси x. В результате возникает электрическое поле E_y, направленное вдоль проволоки (ось y). В предельном случае $H \gg H_{c1}$ это поле равно

$$E_y = \frac{Bv_x}{c}. \tag{3.76}$$

Для доказательства соотношения (3.76) достаточно приравнять мощность $E_y J$, диссипируемую в единице объема образца, работе $(\partial p/\partial x)\, v_x$,

совершаемой над нитями при наличии градиента давления, и воспользоваться выражением (3.72′). Следовательно, чтобы поддерживать ток J постоянным, в образце должно существовать постоянное электрическое поле E_y. Как показали Ким и Андерсон [61], этот диссипативный механизм позволяет описать многие особенности сопротивления жестких сверхпроводников.

Существенно заметить, что скорости движения нитей, получаемые при магнитном (1) и электрическом (2) способах измерений, имеют



Фиг. 38. Схема электрических измерений на проволоке из жесткого сверхпроводника.

При протекании вдоль проволоки тока $J=-(c/4\pi)\,(dB/dx)$ плотность вихревых нитей выше на левой стороне проволоки ($dB/dx<0$). Это приводит к дрейфу нитей со скоростью v_x вдоль положительного направления оси x.

совершенно разный порядок величин. В случае 1 „крип“ обычно измеряется в течение часов или дней, а скорость v_x составляет ~ 1 *мм* за 1 день, или $v_x \sim 10^{-6}$ *см/сек*; в случае 2, полагая в (3.76) $B=10^4$ *гс*, $E_y=10^{-6}$ *в/см*, получаем $v_x \sim 10^{-2}$ *см/сек*. Основная трудность, встречающаяся при электрических измерениях, связана с возможной неоднородностью проволоки вдоль ее длины. Экспериментально найдено, что в различных кусках одной и той же проволоки поле E_y часто имеет разную величину.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

а) Скорость „крипа“ носит *активационный* характер

$$v_x = v_0 e^{-E/k_B T}. \tag{3.77}$$

Величина v_0 точно не известна, но обычно находится в области $\sim 10^3$ *см/сек*. Энергия активации E может достигать 100° К.

б) Энергия активации E зависит от градиента давления dp/dx по закону

$$E = E_0 - \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \rho^4, \tag{3.78}$$

где величина ρ имеет размерность длины и обычно составляет ~ 500 Å. Величины E_0 и ρ можно связать с критическим градиентом давления α_m, если заметить, что при $T \to 0$ скорость v_x отлична от нуля лишь при $E = 0$. Согласно (3.78),

$$\alpha_m = \frac{E_0}{\rho^4} \qquad (T = 0). \tag{3.79}$$

Укажем также на некоторые важные следствия из этих результатов (которые в основном были получены Андерсоном, Кимом и их сотрудниками). Прежде всего из-за наличия сильной зависимости (3.77) скорости v_x от энергии E представление о критическом состоянии можно распространить на конечные температуры. Введем минимальную (с точки зрения возможности экспериментального наблюдения) скорость движения нитей $v_{\text{мин}}$. Тогда при

$$\frac{E}{k_B T} > \ln \frac{v_0}{v_{\text{мин}}}$$

можно считать, что структура нитей „заморожена“. Следовательно, критическое состояние при температуре T формально отвечает выполнению условия

$$E_0 - \left|\frac{dp}{dx}\right| \rho^4 = k_B T \ln \frac{v_0}{v_{\text{мин}}},$$

или

$$\left|\frac{dp}{dx}\right| = \alpha_m \left(1 - \frac{k_B T}{E_0} \ln \frac{v_0}{v_{\text{мин}}}\right). \tag{3.80}$$

Вообще говоря, величина α_m изменяется с температурой (поскольку в ее определение входят зависящие от температуры величины λ, ξ и энергия конденсации). Однако, если температура T значительно ниже температуры перехода T_c, этим изменением можно пренебречь. Тогда результирующая температурная зависимость определяется лишь множителем $k_B T$. Линейное изменение градиента $|dp/dx|$ с температурой было экспериментально подтверждено Кимом на различных сплавах и соединениях (критический ток жестких сверхпроводников оказался при этом сильно зависящим от температуры даже в области $T \ll T_c$).

Другим важным следствием соотношения (3.77), как было отмечено Андерсоном, является возможность появления сильной тепловой неустойчивости. Действительно, предположим, что в некоторой малой области образца энергия активации E_0 несколько меньше, чем в остальной части; тогда вихревые нити в этой области будут рассеивать большую мощность $\sim (\partial p/\partial x) v_x$ (на 1 $см^3$). Это приведет к быстрому возрастанию локальной температуры (если теплопроводность материала достаточно низка) и, согласно (3.77), к увеличению скорости v_x, что означает появление неустойчивости. Этот тепловой эффект всегда следует иметь в виду при проектировании сверхпроводящих магнитов.

Заключительные замечания

Наше обсуждение эффектов „зацепления" вихревых нитей и явления „крипа" носило чисто феноменологический характер. Безусловно, хотелось бы попытаться вычислить величины E_0, ρ и v_0 на основе микроскопической теории. Имеются, однако, две трудности:

1. Не вполне ясно, каков механизм взаимодействия между вихревыми нитями и дефектами решетки. Ранее уже отмечалось, что важный вклад в это взаимодействие дают локальные изменения глубины проникновения λ из-за упругих напряжений и дефектов. Другой, более очевидный вклад связан с изменением энергии конденсации. Существуют, по-видимому, и другие механизмы.

2. Отсутствует математический аппарат для описания состояния метастабильного равновесия и необратимого движения сильно взаимодействующих нитей в присутствии случайных возмущений. Возвращаясь к вышеуказанной аналогии, можно сказать, что теория, с одной стороны, должна давать возможность определить равновесную форму склона холма, с другой — описывать процесс образования лавин. Обе задачи достаточно сложны. Имеется одно интересное предложение, сделанное Франком: описывать явление „крипа" как результат движения дислокаций в двумерной решетке вихревых нитей.

ЛИТЕРАТУРА

Структура вихревого состояния

Абрикосов А. А., ЖЭТФ, **32**, 1442 (1957).
Goodman B. B., Rev. Mod. Phys., **36**, 12 (1964).

Обратимые кривые намагничивания

Livingston J. D., Phys. Rev., 129, 1943 (1963).
Kinsel T., Lynton E. A., Serin B., Phys. Lett., **3**, 30 (1962).

Дифракция нейтронов на вихревых нитях

Cribier D., Jacrot B., Rao L. M., Farnoux B., Phys. Lett., **9**, 106 (1964).
Cribier D. et al., в книге Progress in Low Temperature Physics, ed. C. G. Gorter, vol. V, Amsterdam, 1967.

Наблюдение нитей методом электронной микроскопии

Träube H., Essmann U., Phys. Stat. Sol., 20, 95 (1967).

Зацепление вихревых нитей и явление „крипа"

Bean C. P., Phys. Rev. Lett., 8, 250 (1962).
Bean C. P., Rev. Mod. Phys., **36**, 31 (1964).
Anderson P. W., Phys. Rev. Lett., **9**, 309 (1962).
Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R., Phys. Rev., 129, 528 (1963).
Friedel J., De Gennes P. G., Matricon J., Appl. Phys. Lett., 2. 199 (1963).

Вязкое движение вихревых нитей

Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R., Phys. Rev., **A139**, 1163 (1965).

Глава IV

ОПИСАНИЕ КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

§ 1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НОРМАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПРИТЯЖЕНИЯ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ

Основное состояние свободного газа электронов соответствует заполнению всех одноэлектронных уровней энергии $\hbar^2k^2/2m$ ($\mathbf{k}$ — волновой вектор) вплоть до некоторой энергии $E_F = \hbar^2k_F^2/2m$ — энергии Ферми. Однако такое состояние является неустойчивым при наличии сколь угодно слабого *притяжения* между частицами, как было показано Купером [62]. Происхождение неустойчивости можно понять, изучая поведение двух выделенных электронов (с координатами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$) в присутствии остальных электронов, рассматриваемых по-прежнему как свободный электронный газ. Роль этого электронного газа сводится к тому, что в соответствии с принципом Паули выделенные электроны не могут занимать состояния с $k < k_F$. Введем волновую функцию двух электронов $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и будем рассматривать только такие состояния, для которых центр инерции пары ($\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$) покоится. Тогда функция ψ зависит лишь от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$; разлагая ее в ряд по плоским волнам, получаем

$$\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}, \tag{4.1}$$

где $g(\mathbf{k})$ — амплитуда вероятности обнаружить один из электронов в состоянии с импульсом $\hbar\mathbf{k}$, а другой в состоянии $-\hbar\mathbf{k}$. Поскольку все состояния с $k < k_F$ уже заняты, то, согласно принципу Паули,

$$g(\mathbf{k}) = 0 \text{ для } k < k_F. \tag{4.2}$$

Уравнение Шредингера для рассматриваемых двух электронов имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi = \left(E + \frac{\hbar^2k_F^2}{m}\right)\psi. \tag{4.3}$$

Здесь E — энергия пары, отсчитываемая от состояния, в котором оба электрона находятся на уровне Ферми. Подставив (4.1) в (4.3), получим уравнение для $g(\mathbf{k})$

$$\frac{\hbar^2}{m}k^2 g(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') = (E + 2E_F) g(\mathbf{k}), \tag{4.4}$$

где

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{L^3}\int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}$$

— матричный элемент взаимодействия между состояниями $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, а L^3 — объем системы. Уравнение (4.4) совместно с принципом Паули (4.2) иногда называют уравнением Бете — Голдстоуна для задачи двух электронов. При $E > 2E_F$ оно имеет непрерывный спектр и описывает процесс рассеяния двух электронов из начального состояния $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ в конечное $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ (с той же энергией). Однако если взаимодействие V отвечает *притяжению, то возможны также решения, соответствующие некоторым связанным состояниям* с энергиями $E < 2E_F$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим упрощенное взаимодействие вида

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -\frac{V}{L^3}, \text{ если } \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D, \qquad V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 0 \text{ в противном случае.} \tag{4.5}$$

(Это взаимодействие соответствует притяжению и постоянно по величине в области энергий шириной $\hbar\omega_D$, расположенной выше уровня Ферми.) Тогда уравнение (4.4) принимает вид

$$\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{m} + E + 2E_F\right) g(\mathbf{k}) = C, \tag{4.6}$$

где правая часть C не зависит от $\mathbf{k}$;

$$C = -\frac{V}{L^3}\sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}'), \qquad E_F < \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D. \tag{4.7}$$

Из сравнения (4.6) и (4.7) находим условие самосогласованности

$$1 = \frac{V}{L^3}\sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{-E + \frac{\hbar^2 k'^2}{m} - 2E_F}, \qquad E_F < \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D. \tag{4.8}$$

Если положить

$$\xi' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - E_F \tag{4.9}$$

и ввести плотность числа состояний в единичном интервале энергий

$$N(\xi') = \frac{4\pi k'^2}{(2\pi)^3}\frac{dk'}{d\xi'},$$

то условие (4.8) примет вид

$$1 = V\int_0^{\hbar\omega_D} N(\xi')\frac{d\xi'}{2\xi' - E}. \tag{4.10}$$

Если предположить, кроме того, что $\hbar\omega_D \ll E_F$, то величину $N(\xi')$ можно рассматривать как постоянную и заменить ее значением $N(0)$ на уровне Ферми. Взяв интеграл (4.10), получим

$$1 = \frac{1}{2} N(0) V \ln \frac{E - 2\hbar\omega_D}{E}, \qquad (4.11)$$

или, в пределе слабого взаимодействия $N(0)V \ll 1$,

$$E = -2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)V}. \qquad (4.12)$$

Таким образом, в рассмотренном случае существует связанное состояние двух электронов с энергией $E < 0$. Если мы имеем сначала свободный электронный газ, а затем включаем взаимодействие V, то можно ожидать, что электроны будут группироваться в пары, отдавая энергию внешней среде. Следовательно, нормальное состояние является неустойчивым.

НЕСКОЛЬКО ВАЖНЫХ ЗАМЕЧАНИЙ

1. Неустойчивость сохраняется даже в том случае, когда взаимодействие V является весьма слабым, при условии, что оно отвечает притяжению. В этом состоит существенное отличие найденного результата от обычной задачи двух тел. Если мы имеем всего две частицы, потенциал взаимодействия (притяжения) которых характеризуется конечным радиусом действия, то они образуют связанное состояние только в том случае, если величина притяжения превышает некоторое пороговое значение.

Для задачи двух тел ($k_F = 0$) плотность состояний $N(\xi)$ при $\xi \to 0$ изменяется по закону $\xi^{1/2}$ и выражение

$$f(E) = V \int N(\xi) \frac{d\xi}{2\xi - E} \qquad (4.13)$$

остается конечным даже для $E = 0$. Поэтому, если величина V мала, то $f(E) < f(0) < 1$ для $E < 0$, и условие $f(E) = 1$ не будет выполняться в области связанных состояний. Напротив, в нашей задаче $N(\xi) \approx \text{const}$, $f(0) = \infty$, следовательно, всегда найдется значение $E < 0$, такое, что $f(E) = 1$.

2. Энергия связи пропорциональна $\exp(-2/NV)$. Очевидно, такую зависимость нельзя разложить в ряд по степеням V при $V \to 0$. Эта алгебраическая трудность явилась значительной помехой для развития теории сверхпроводимости.

3. В предыдущем расчете мы учли принцип Паули для системы, состоящей из электрона 1 (или 2) и электронов внутри сферы Ферми. Кроме этого, необходимо обеспечить условие антисимметрии волновой функции относительно перестановки электронов 1 и 2. Для упрощенного взаимодействия V, описываемого формулой (4.5), амплитуда $g(\mathbf{k})$ зависит лишь от ξ, т. е. от величины вектора $\mathbf{k}$. Поэтому, как следует из (4.1), координатная часть волновой функции $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ симметрична, а спиновая часть должна быть антисимметричной, т. е. иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2).$$

(Мы следуем обозначениям, принятым в книге Шиффа [63].)

Эта функция описывает состояние с равным нулю полным спином пары, т. е. антипараллельное спаривание. Если бы взаимодействие $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ не имело простой формы (4.5), а сильно зависело от угла между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, то можно было бы обнаружить а) несколько связанных состояний. б) пространственно анизотропные решения и, следовательно, более сложную спиновую зависимость. Практически оказывается, что угловая зависимость $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ в сверхпроводящих металлах не является достаточно сильной. чтобы привести к неожиданным эффектам.

Задача. Вычислить средний квадрат радиуса ρ куперовской пары.
Р е ш е н и е. По определению.

$$\rho^2 = \frac{\int |\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)|^2 R^2 \, d\mathbf{R}}{\int |\psi|^2 \, d\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

$$\rho^2 = \frac{\sum\limits_{k} |\nabla_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k})|^2}{\sum\limits_{k} |g(\mathbf{k})|^2} \approx \frac{N(0)\,(\partial\xi/\partial k)^2_{\xi=0} \int\limits_0^\infty (\partial g/\partial\xi)^2 \, d\xi}{N(0) \int\limits_0^\infty g^2 \, d\xi}.$$

В приближении (4.5) $g = C/(E - 2\xi)$. Кроме того, $(\partial k/\partial\xi)_{\xi=0} = 1/\hbar v_F$, где v_F — фермиевская скорость. Выполняя интегрирование, находим

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\hbar v_F}{E}.$$

§ 2. ПРИРОДА ПРИТЯЖЕНИЯ

В обычном электронном газе единственным взаимодействием между частицами является кулоновское отталкивание, так что эффект Купера возникнуть не может. Для получения матричных элементов $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, отвечающих притяжению, необходимо, чтобы электроны были связаны с другой системой частиц (или возбуждений) твердого тела. (Такими возбуждениями могут быть, например, фононы, электроны из других зон, спиновые волны в магнитной среде и т. д.) В настоящее время установлено, что важную роль играет лишь один механизм, а именно электрон-фононное взаимодействие, на что впервые указал Фрёлих [64]. К обсуждению этого вопроса мы и перейдем.

Квантовомеханическое описание

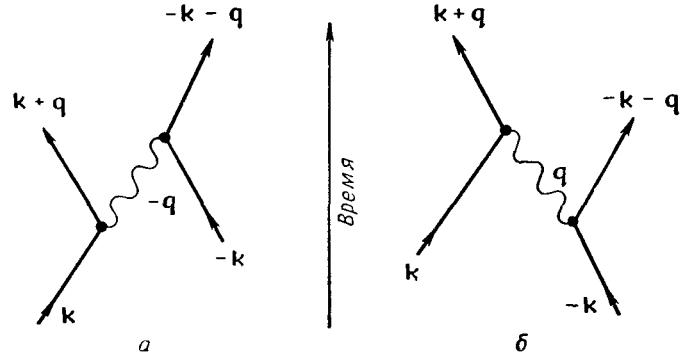
Найдем матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ электрон-электронного взаимодействия, отвечающий переходу двух электронов из начального состояния $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ в конечное $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$. Обозначим эти состояния соответственно через I и II. В общем случае матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ состоит из двух членов:

а) Член, отвечающий прямому кулоновскому отталкиванию электронов $U_c(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Соответствующий матричный элемент имеет вид

$$\langle \mathrm{I} | \mathscr{H}_c | \mathrm{II} \rangle = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} U_c(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2, \quad (4.14)$$

$$\langle \mathrm{I} | \mathscr{H}_c | \mathrm{II} \rangle = \int U_c(\rho)\, e^{i\mathbf{q}\cdot\rho}\, d\rho = U_{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} \quad (4.15)$$

(волновые функции нормированы на единичный объем).



Фиг. 39. Взаимодействие электронов, обусловленное фононами.

а — электрон в состоянии $\mathbf{k}$ испускает фонон с волновым вектором $-\mathbf{q}$, который затем поглощается вторым электроном; *б* — электрон в состоянии $-\mathbf{k}$ испускает фонон с волновым вектором $\mathbf{q}$, который поглощается первым электроном.

б) Член, отвечающий такому процессу, когда один из электронов испускает фонон, который затем поглощается другим электроном. Этот процесс показан на фиг. 39. Энергия начального состояния I равна

$$E_{\mathrm{I}} = 2\xi_{\mathbf{k}},$$

где $\xi_{\mathbf{k}}$ определяется соотношением (4.9) (для удобства мы всюду будем отсчитывать одноэлектронные энергии $\xi_{\mathbf{k}}$ от уровня Ферми). Аналогично энергия конечного состояния II равна

$$E_{\mathrm{II}} = 2\xi_{\mathbf{k}'}.$$

Условию сохранения импульса удовлетворяют два промежуточных состояния:

1. Электрон 1 находится в состоянии $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$, электрон 2 — в состоянии $-\mathbf{k}$; испущен фонон с волновым вектором $-\mathbf{q}$ и энергией $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$

$$E_{\mathrm{I}} = \xi_{\mathbf{k}'} + \xi_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}$$

(отметим, что $\xi_{\mathbf{k}}$ и $\omega_{\mathbf{k}}$ являются четными функциями $\boldsymbol{k}$).

2. Электрон 1 находится в состоянии $\mathbf{k}$, электрон 2 — в состоянии $-\mathbf{k}' = -(\mathbf{k}+\mathbf{q})$, фонон имеет волновой вектор $\mathbf{q}$ и энергию $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$

$$E_2 = \xi_{\mathbf{k}'} + \xi_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} = E_1.$$

Во втором порядке теории возмущений матричный элемент, связывающий состояния I и II, равен

$$\langle \mathrm{I} | \mathscr{H}_{\text{косв}} | \mathrm{II} \rangle = \\ = \frac{1}{2} \sum_i \langle \mathrm{I} | \mathscr{H}_{\text{эл.-фон}} | i \rangle \left(\frac{1}{E_{\mathrm{II}} - E_i} + \frac{1}{E_{\mathrm{I}} - E_i} \right) \langle i | \mathscr{H}_{\text{эл.-фон}} | \mathrm{II} \rangle. \quad (4.16)$$

Здесь сумма берется по всем допустимым промежуточным состояниям; $\mathscr{H}_{\text{эл.-фон}}$ — гамильтониан электрон-фононного взаимодействия. Обозначим через $W_{\mathbf{q}}$ матричный элемент, соответствующий испусканию или поглощению одного фонона с волновым вектором $\mathbf{q}$. Тогда

$$\langle \mathrm{I} | \mathscr{H}_{\text{косв}} | \mathrm{II} \rangle = \frac{|W_{\mathbf{q}}|^2}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{\omega + \omega_{\mathbf{q}}} \right), \quad (4.17)$$

где мы определили частоту ω как разность

$$\hbar\omega = \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}}. \quad (4.18)$$

Таким образом, $\hbar\omega$ и $\hbar\mathbf{q}$ равны соответственно изменению энергии и импульса электрона 1 при переходе I $\to$ II. Полный матричный элемент равен

$$\langle \mathrm{I} | \mathscr{H} | \mathrm{II} \rangle = U_{\mathbf{q}} + \frac{2|W_{\mathbf{q}}|^2}{\hbar} \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}. \quad (4.19)$$

Для $\omega < \omega_{\mathbf{q}}$ член, соответствующий косвенному обмену, отрицателен, т. е. отвечает притяжению. Таким образом, мы приходим к выводу, что результирующее взаимодействие представляет собой притяжение, если член $U_{\mathbf{q}}$ не слишком велик.

Описание с помощью диэлектрической проницаемости

Эффективное электрон-электронное взаимодействие можно описывать также следующим образом. „Голое" кулоновское отталкивание между двумя электронами e^2/r приводит к матричному элементу $4\pi e^2/q^2$. Однако это взаимодействие экранируется другими электронами, а также положительными ионами решетки. Если интересующие нас частоты близки к собственным частотам $\omega_{\mathbf{q}}$ движения ионов, то может возникнуть явление резонанса. Ионы могут „переэкранировать" отрицательный заряд электрона 1, в результате возникает положительно заряженное облако, которое будет притягиваться электроном 2.

На практике эффекты экранирования можно описывать с помощью диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$, являющейся функцией

волнового вектора и частоты. Эффективное взаимодействие тогда равно взаимодействию „голых" частиц, уменьшенному в ε раз:

$$\langle \mathrm{I} \mid \mathscr{H} \mid \mathrm{II} \rangle = \frac{4\pi e^2}{q^2 \varepsilon (\mathbf{q}, \omega)}. \tag{4.20}$$

Задача заключается в вычислении ε. Мы произведем этот расчет для очень простой модели и покажем, что выражения (4.19) и (4.20) согласуются между собой.

Модель „желе" Рассмотрим систему электронов, имеющих массу m и заряд $-e$, и ионов с массой M и зарядом $+Ze$. В целом система нейтральна, если число ионов в 1 $см^3$ равно n/Z, где n — плотность электронов. Учтем электростатическое взаимодействие между частицами и отвлечемся от того факта, что ионы образуют решетку, т. е. будем трактовать их как жидкость. Эта простая модель металла носит название модели „желе" [1]). Она не учитывает в основном следующих обстоятельств:

1. Наличия короткодействующего отталкивания между ионами, обусловленного перекрытием их глубоко расположенных электронных оболочек.

2. Того факта, что электронные волновые функции должны быть ортогональны к волновым функциям глубоко лежащих уровней каждого иона. (Это привело бы к отталкивательному электрон-ионному взаимодействию.)

3. Возможности распространения поперечных колебаний (поперечных фононов) в ионной системе. Такие колебания существуют в реальном теле, но не описываются нашей жидкостной моделью.

Хотя введенные упрощения носят довольно произвольный характер, результаты, полученные с помощью столь простой модели, оказываются полезными для качественного понимания взаимодействий. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ определяется следующим образом. Предположим, что к системе добавляется извне небольшой заряд с плотностью

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \delta\rho \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\, e^{i\omega t} + \text{Компл. сопр.} \tag{4.21}$$

Это приводит к возникновению в системе экранирующего заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\, e^{i\omega t} + \text{Компл. сопр.} \tag{4.22}$$

---

[1]) Впервые модель „желе" была применена к теории сверхпроводимости Пайнсом [65]; индуцированная фононами часть взаимодействия была получена несколько ранее Бардином и Пайнсом [66]. Описание электрон-ионных систем с помощью единой диэлектрической проницаемости было разработано Нозьером (неопубликованная работа) и обобщено Пайнсом в лекциях, прочитанных в летней школе физики в Лезуш [67].

Диэлектрическая проницаемость, по определению, равна отношению внесенного заряда к полному

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\delta\rho}{\rho + \delta\rho}. \tag{4.23}$$

Таким образом, задача заключается в вычислении „зарядового" отклика ρ. В нашем случае заряд ρ складывается из электронной и ионной компонент

$$\rho = \rho_e + \rho_i.$$

Исходными уравнениями служат:

а) уравнение Пуассона, связывающее электростатический потенциал V с плотностью зарядов $\delta\rho$, ρ_i, ρ_e,

$$\nabla^2 V = -4\pi(\delta\rho + \rho_i + \rho_e); \tag{4.24}$$

б) уравнение движения ионов в электрическом поле $\mathbf{E} = -\nabla V$

$$M\frac{d\mathbf{j}_i}{dt} = nZe^2\mathbf{E}, \tag{4.25}$$

где $\mathbf{j}_i$ — переносимый ионами ток, который связан с ρ_i уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}_i = 0. \tag{4.26}$$

Предполагая смещение ионов слабым, мы можем заменить полную производную $d\mathbf{j}_i/dt$ в уравнении (4.25) частной $\partial\mathbf{j}_i/\partial t$. Исключая затем $\mathbf{j}_i$ из (4.25) и (4.26), получаем

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial t^2} = \frac{nZe^2}{M}\nabla^2 V. \tag{4.27}$$

Наконец, делая замену $\partial/\partial t = i\omega$ и используя (4.24), приходим к уравнению

$$\omega^2\rho_i(\mathbf{q}, \omega) = \omega_i^2\left[\rho_i(\mathbf{q}, \omega) + \rho_e(\mathbf{q}, \omega) + \delta\rho(\mathbf{q}, \omega)\right], \tag{4.28}$$

где

$$\omega_i = \sqrt{\frac{4\pi nZe^2}{M}}. \tag{4.29}$$

Позже мы увидим, что частота ω_i определяет в основном ширину фононного спектра в рассматриваемой простой модели. Типичное значение $\omega_i \sim 10^{13}$ *сек*$^{-1}$;

в) нам потребуется, кроме того, уравнение, описывающее отклик электронного газа (т. е. ρ_e) на приложенный электростатический потенциал V. При составлении этого уравнения необходимо принять во внимание одно упрощающее обстоятельство. Электронный газ обладает двумя характерными частотами: $E_F/\hbar$ и плазменной частотой

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}} \sim \omega_i\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}.$$

Обе эти частоты чрезвычайно велики. Наоборот, частота ω мала ($\omega \sim \omega_i$). Следовательно, в этой части расчета мы можем полностью пренебречь частотой ω и вычислять ρ_e просто для *статического* возмущения V.

Мы сделаем еще одно приближение и найдем ρ_e, используя метод Томаса — Ферми (что строго справедливо только для длинных волн $q \ll k_F$). В этом приближении электронная плотность в точке $\mathbf{r}$ пропорциональна $[E_F + eV(\mathbf{r})]^{3/2}$. Следовательно, относительное изменение этой величины для малых V составляет

$$-\frac{\rho_e}{n_e} = \frac{3}{2}\frac{eV}{E_F}. \tag{4.30}$$

Соответствующую фурье-компоненту $\rho_e(\mathbf{q})$ можно, используя (4.24), записать в виде

$$\rho_e(\mathbf{q}) = \frac{k_s^2}{q^2}(\rho + \delta\rho), \tag{4.31}$$

где

$$k_s^2 = \frac{6\pi n e^2}{E_F}.$$

Объединяя (4.28) и (4.31), находим

$$\begin{gathered}\rho = \rho_i + \rho_e = \left(\frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{k_s^2}{q^2}\right)(\rho + \delta\rho), \\ \varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\omega^2(k_s^2 + q^2) - \omega_i^2 q^2}{\omega^2 q^2}.\end{gathered} \tag{4.32}$$

Исходя из этого выражения, найдем сначала фононную частоту $\omega_\mathbf{q}$ в зависимости от $\mathbf{q}$. Поскольку речь идет о нахождении собственных колебаний в системе, внешний заряд необходимо положить равным нулю [$\delta\rho = 0$, $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 0$]. Для данного вектора $\mathbf{q}$ частота $\omega_\mathbf{q}$ равна

$$\omega_\mathbf{q}^2 = \omega_i^2 \frac{q^2}{k_s^2 + q^2}. \tag{4.33}$$

Для длинных волн частота $\omega_\mathbf{q} \sim (\omega_i/k_s)q$ линейно зависит от величины q и скорости звука ω_i/k_s. При практических применениях эта формула дает довольно разумное значение скорости звука для всех непереходных металлов, если в качестве Z в (4.29) выбрать валентность металла. С помощью (4.33) выражение (4.32) можно представить в виде

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)} = \frac{q^2}{k_s^2 + q^2}\left(1 + \frac{\omega_\mathbf{q}^2}{\omega^2 - \omega_\mathbf{q}^2}\right). \tag{4.34}$$

Тогда матричный элемент взаимодействия запишется следующим образом:

$$\langle \mathrm{II} \mid \mathscr{H} \mid \mathrm{I} \rangle = \frac{4\pi e^2}{q^2 \varepsilon (\mathbf{q}, \omega)} = \frac{4\pi e^2}{k_s^2 + q^2} \left(1 + \frac{\omega_{\mathbf{q}}^2}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} \right). \qquad (4.35)$$

Это выражение совпадает по форме с (4.19), однако численные коэффициенты теперь найдены в явном виде. Первый член представляет собой экранированное кулоновское отталкивание, а второй — взаимодействие, обусловленное фононами, отвечающее притяжению для $\omega < \omega_{\mathbf{q}}$.

Средняя частота фонона $\omega_{\mathbf{q}} \sim \omega_D$ (ω_D — дебаевская частота материала). Поэтому средний интервал энергий, в котором имеется притяжение, составляет по порядку $\hbar\omega_D = k_B\Theta_D$, где k_B — постоянная Больцмана, а дебаевская температура Θ_D имеет порядок 300° К ($k_B\Theta_D \sim 0{,}03$ *эв*). Отметим, что частота $\omega_{\mathbf{q}}$ (или ω_D) зависит от массы ионов M. Из выражений (4.29) и (4.33) следует, что $\omega_{\mathbf{q}} \sim M^{-1/2}$. Поэтому два изотопа одного и того же сверхпроводника имеют разные ширины областей притяжения и их температуры перехода несколько отличаются. Этот *изотопический эффект* был впервые предсказан Фрёлихом и вскоре обнаружен экспериментально Максвеллом [68] и Рейнольдсом и др. [69]. Существование изотопического эффекта указывает на то, что колебания решетки вносят важный вклад в электрон-электронное взаимодействие.

Численные значения констант взаимодействия

В настоящее время *не существует* надежного способа вычисления матричных элементов $V_{\mathbf{kk}'}$, так как мы слишком мало знаем о зонной структуре рассматриваемых систем, о взаимодействиях электронов с фононами и т. п. Особенно затрудняет расчеты то обстоятельство, что при низких частотах ω кулоновское отталкивание и косвенное взаимодействие в значительной степени компенсируют друг друга. В частности, легко видеть, что в модели „желе" $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) \to \infty$, когда $\omega \to 0$. В этой модели статическое возмущение $\delta\rho$ полностью экранируется, поскольку ничто не мешает положительным ионам образовать „облако" любой плотности, чтобы нейтрализовать заряд $\delta\rho$[1]). Если же учесть короткодействующие силы между ионами, этот эффект исчезает — экранирование делается неполным и величина $\varepsilon(\mathbf{q}, 0)$ становится конечной. Это замечание показывает, что энергетическая

[1]) Единственным представляющим физический интерес примером столь полного экранирования является, по-видимому, случай палладия, в котором растворены атомы водорода. Если к гидрогенизированному таким способом палладию добавляется металлическая примесь, то экранирующий заряд вокруг примеси обязан главным образом наличию обладающих высокой подвижностью протонов, а не электронов.

ширина зоны притяжения и сама величина силы притяжения довольно чувствительны к деталям физической модели. Поэтому очень важно делать одинаковые приближения при вычислении прямого и косвенного взаимодействия, чтобы избежать большой ошибки при нахождении их суммы.

Задача. Оценить в модели „желе" величину $N(0)V_p$ для простых металлов.

Решение. Определим V_p как притягательную часть взаимодействия при $\omega = 0$. Тогда

$$V_p = \frac{4\pi e^2}{k_s^2 + q^2}.$$

В качестве q возьмем корень из среднего значения величины $q^2 = 3q_D^2/5$, где q_D находится из условия дебаевского обрезания

$$\frac{v_0}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}q_D^3 = 1$$

(v_0 — атомный объем). Наконец,

$$N(0) = \frac{mk_F}{2\pi^2\hbar^2}, \tag{4.36}$$

$$N(0)V_p = \frac{2me^2}{\pi\hbar^2}\frac{k_F}{q^2 + k_s^2}. \tag{4.37}$$

Величина k_s^2 определена выше [см. (4.31)] как функция плотности электронов n

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2} = \frac{Z}{v_0}. \tag{4.38}$$

Комбинируя полученные результаты и учитывая, что $\hbar^2/me^2 = a_0 = 0{,}529$Å ($a_0$ — боровский радиус), находим [1])

$$N(0)V_p = \frac{1}{2 + 4{,}7a_0 \mid v_0 Z \mid^{-1/3}}. \tag{4.39}$$

Задача. Определить для низких частот знак взаимодействия между электронами в *магнитной* среде.

Решение. Предположим, что взаимодействие электрона, расположенного в точке $\mathbf{r}$ и имеющего спин $\mathbf{S}_i$, с локальной намагниченностью среды $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ в той же точке имеет скалярную форму

$$H_1 = -\Gamma \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}).$$

---

[1]) Результат (4.39) отличается от полученного Андерсоном и Морелом [70]. Различие объясняется тем, что указанные авторы пользовались соотношением $\omega_{\mathbf{q}} = (\omega_l/k_s)\,q$ вместо самосогласованной формы

$$\omega_{\mathbf{q}} = \omega_l \frac{q}{\left(k_s^2 + q^2\right)^{1/2}}.$$

Обсуждение эффективного взаимодействия в форме, позволяющей учесть периодичность структуры, более точное рассмотрение явлений экранирования и т. д. можно найти в книге Пайнса [71], гл. 5.

Поскольку нас интересует предельный случай нулевой частоты, мы вычислим лишь статический отклик магнитной среды на возмущение H_1. В первом порядке по Г отклик имеет вид

$$\delta M_\alpha(\mathbf{r}') = \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\Gamma S_{i\beta},$$

где $\chi_{\alpha\beta}$ — тензор обобщенной восприимчивости; $\alpha, \beta = x, y, z$. Напишем теперь выражение для взаимодействия V между $\delta\mathbf{M}$ и некоторым другим электроном (со спином $\mathbf{S}_j$) в точке $\mathbf{r}'$

$$V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\Gamma\mathbf{S}_j\cdot\delta\mathbf{M}(\mathbf{r}') = -\Gamma^2\sum_{\alpha\beta} S_{j\alpha}\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,S_{i\beta}.$$

Здесь снова удобно рассматривать фурье-компоненту

$$V(\mathbf{q}) = -\Gamma^2\sum_{\alpha\beta} S_{i\alpha}\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q})\,S_{j\beta}.$$

Тензор статической восприимчивости $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q})$ симметричен, и поэтому его можно диагонализовать соответствующим выбором осей. Три главных значения восприимчивости $\chi_{\alpha\alpha}(\mathbf{q})$ всегда положительны. (В противном случае магнитный материал обладал бы неустойчивостью относительно синусоидальных с волновым вектором $\mathbf{q}$ искажений намагниченности.)

Если спины $\mathbf{S}_i$ и $\mathbf{S}_j$ антипараллельны (синглет), то статическое взаимодействие имеет знак плюс (отталкивание). Из соображений непрерывности можно заключить, что этот результат справедлив также и при конечных частотах, малых по сравнению с частотами, соответствующими обменному взаимодействию в магнитной среде. (В упорядоченной системе знак взаимодействия меняется при $\omega=\omega_{\mathbf{q}}$, где $\omega_{\mathbf{q}}$ — наименьшая при заданном волновом векторе $\mathbf{q}$ частота спиновой волны.) Таким образом, в магнитной среде низкочастотная часть взаимодействия электронов с антипараллельными спинами (т. е. куперовской пары) носит отталкивательный характер. Напротив, для пар электронов с параллельными спинами (триплет) можно в принципе получить притяжение на низких частотах.

§ 3. ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Выбор пробной волновой функции

Согласно соображениям Купера (см. § 1), нормальное основное состояние газа свободных электронов оказывается неустойчивым при наличии притяжения между частицами. Конечно, эти соображения носят лишь предположительный характер; в частности, в них не учитывается возможность рассеяния электронов, расположенных над фермиевской поверхностью, на электронах внутри нее. Теперь мы более детально остановимся на расчете структуры конденсированного состояния, рассматривая все электроны как равноправные.

В § 1 мы описывали пару электронов с помощью волновой функции $\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Чтобы рассмотреть все N электронов на равных основаниях, естественно попытаться написать волновую функцию

в следующем более общем виде:

$$\varphi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\varphi(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \ldots \varphi(\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N). \quad (4.40)$$

В состоянии, описываемом функцией φ_N, электроны сгруппированы попарно; при этом волновая функция любой пары равна φ. Вид этой функции мы можем определить, отыскав минимум энергии в состоянии φ_N.

ТРИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАМЕЧАНИЯ

а) Функцию φ_N можно построить лишь для четного числа электронов. Для нечетного числа N понадобилось бы поместить последний электрон в отдельное состояние. Для электронного газа ($N \sim 10^{23}$) наличие этого электрона привело бы к совершенно несущественным поправкам порядка $1/N$ для энергии в расчете на одну частицу и для других свойств конденсированного состояния. Наоборот, в случае сверхтекучести фермионных систем с небольшим числом N (атомные ядра) четность или нечетность числа N имеет большое значение, в особенности для формы спектра возбуждений.

б) В определении функции φ_N мы не учли спиновых индексов. Руководствуясь аналогией с рассмотренным в § 1 случаем, будем считать направления спинов электронов пары противоположными, т. е. рассматривать состояния $(\uparrow\downarrow)$. Такой выбор функции φ_N является наиболее подходящим для взаимодействия $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, слабо зависящего от угла между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$.

в) Функция φ_N должна быть антисимметричной. Это свойство мы будем записывать с помощью оператора А

$$\varphi_N = \mathrm{A}\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \ldots \varphi(\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N)(1\uparrow)(2\downarrow)\ldots(N-1\uparrow)(N\downarrow). \quad (4.41)$$

Алгебраические преобразования

Хотя формула (4.41) представляет собой явное выражение для φ_N (что, конечно, является ее достоинством), при конкретных расчетах ее применение приводит к значительным трудностям. Для дальнейшего удобно ввести фурье-компоненту $g_{\mathbf{k}}$ функции пары $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}; \quad (4.42)$$

тогда

$$\varphi_N = \sum_{\mathbf{k}_1} \cdots \sum_{\mathbf{k}_{N/2}} g_{\mathbf{k}_1} \ldots g_{\mathbf{k}_{N/2}} \times$$
$$\times \mathrm{A} e^{i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \ldots e^{i\mathbf{k}_{N/2}\cdot(\mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N)}(1\uparrow)(2\downarrow)\ldots(N\downarrow). \quad (4.43)$$

Функция $\mathrm{A}\exp\left[i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\right]\ldots\exp\left[i\mathbf{k}_{N/2}\cdot(\mathbf{r}_{N-1}-\mathbf{r}_N)\right](1\uparrow)(2\downarrow)\ldots(N\downarrow)$ имеет простой физический смысл. Она описывает состояние, в котором один из электронов находится в состоянии $(\mathbf{k}_1\uparrow)$, другой — в состоянии $(-\mathbf{k}_1\downarrow)$, третий — в состоянии $(\mathbf{k}_2\uparrow)$ и т. д. Наличие оператора А обеспечивает должную антисимметрию волновой функции. Эта антисимметричная функция в литературе обычно носит название детер-

минанта Слейтера, образованного из состояний

$$(\mathbf{k}_1\uparrow)(-\mathbf{k}_1\downarrow)(\mathbf{k}_2\uparrow)(-\mathbf{k}_2\downarrow)\ \dots\ (\mathbf{k}_{N/2}\uparrow)(-\mathbf{k}_{N/2}\downarrow).$$

В обозначениях Вигнера—Иордана детерминант Слейтера можно представить в иной, более удобной форме

$$a^+_{\mathbf{k}_1\uparrow}a^+_{-\mathbf{k}_1\downarrow}\ \dots\ a^+_{\mathbf{k}_{N/2}\uparrow}a^+_{-\mathbf{k}_{N/2}\downarrow}\varphi_0. \tag{4.44}$$

Оператор рождения $a^+_{\mathbf{k}\alpha}$, действуя на вакуумное состояние φ_0, создает электрон в состоянии $(\mathbf{k}\alpha)$. Мы также будем пользоваться оператором уничтожения $a_{\mathbf{k}\alpha}$, сопряженным оператору $a^+_{\mathbf{k}\alpha}$ и обладающим свойством

$$a_{\mathbf{k}\alpha}\varphi_0 = 0.$$

Вигнер и Иордан показали, что все свойства слейтеровского детерминанта в точности передаются формой (4.44), если операторы a и a^+ подчиняются следующим соотношениям антикоммутации [1]):

$$\begin{aligned} a^+_{\mathbf{k}\alpha}a^+_{\mathbf{l}\beta} + a^+_{\mathbf{l}\beta}a^+_{\mathbf{k}\alpha} &= 0,\\ a^+_{\mathbf{k}\alpha}a_{\mathbf{l}\beta} + a_{\mathbf{l}\beta}a^+_{\mathbf{k}\alpha} &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}\delta_{\alpha\beta},\\ a_{\mathbf{k}\alpha}a_{\mathbf{l}\beta} + a_{\mathbf{l}\beta}a_{\mathbf{k}\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{4.45}$$

В этих обозначениях функция φ_N принимает вид

$$\varphi_N = \sum_{\mathbf{k}_1}\ \dots\ \sum_{\mathbf{k}_{N/2}} g_{\mathbf{k}_1}\ \dots\ g_{\mathbf{k}_{N/2}}a^+_{\mathbf{k}_1\uparrow}a^+_{-\mathbf{k}_1\downarrow}\ \dots\ a^+_{\mathbf{k}_{N/2}\uparrow}a^+_{-\mathbf{k}_{N/2}\downarrow}\varphi_0. \tag{4.46}$$

Выражение (4.46) по-прежнему не вполне удобно для вычислений. Рассмотрим вместо φ_N производящую функцию

$$\tilde{\varphi} = C\prod_{\mathbf{k}}(1 + g_{\mathbf{k}}a^+_{\mathbf{k}\uparrow}a^+_{-\mathbf{k}\downarrow})\varphi_0, \tag{4.47}$$

где произведение $\prod_{\mathbf{k}}$ берется по всем плоским волнам [2]), а C — нормировочная постоянная. Из сравнения (4.46) и (4.47) легко видеть, что с точностью до множителя C функция φ_N представляет собой часть функции $\tilde{\varphi}$, содержащую N операторов рождения (действующих на φ_0), т. е. компоненту $\tilde{\varphi}$, которая описывает N-частичное состояние. Запишем выражение для $\tilde{\varphi}$ в несколько ином виде, введя множитель C под знак произведения:

$$\tilde{\varphi} = \prod_{\mathbf{k}}(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}a^+_{\mathbf{k}\uparrow}a^+_{-\mathbf{k}\downarrow})\varphi_0, \tag{4.48}$$

---

[1]) См. книгу Ландау и Лифшица [72].

[2]) Заметим что все множители под знаком $\prod_{\mathbf{k}}$ коммутируют между собой, в чем можно убедиться с помощью соотношений (4.45).

где

$$\frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} = g_{\mathbf{k}}, \quad u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1. \tag{4.49}$$

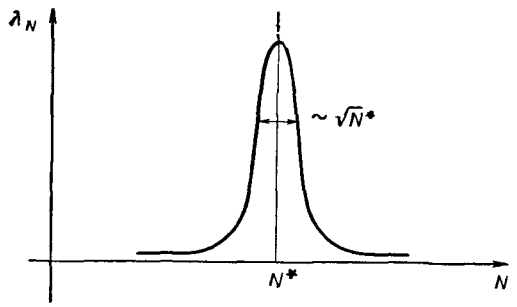
Последнее условие обеспечивает нормировку $\tilde{\varphi}$. Мы предполагаем, что $g_{\mathbf{k}}$, $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ являются вещественными функциями. (В дальнейшем мы увидим, что это ограничение можно снять.) Функция $\tilde{\varphi}$, которая была введена Бардином, Купером и Шриффером в их фундаментальной работе [73] в 1957 г., имеет значительно более простую структуру, чем φ_N. Оказывается, что для больших значений N все расчеты можно выполнять, используя функцию $\tilde{\varphi}$, а не φ_N. Чтобы уяснить это обстоятельство, напишем разложение

$$\tilde{\varphi} = \sum_N \lambda_N \varphi_N \tag{4.50}$$

при условии

$$\sum_N |\lambda_N|^2 = 1,$$

обеспечивающем нормировку. (Отметим, что сделанный ранее выбор фазы в $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ автоматически приводит к вещественности коэффициентов λ_N.) На фиг. 40 показан вид кривой λ_N для больших



Фиг. 40. Амплитуда вероятности λ_N нахождения системы, описываемой волновой функцией $\tilde{\varphi}$ [см. (4.48)], в состоянии с заданным числом частиц N. При $N = N^*$ имеется очень узкий пик.

значений N; он не зависит от структуры коэффициентов $g_{\mathbf{k}}$. Кривая имеет острый максимум, положение которого можно найти, вычислив среднее значение числа частиц в рассматриваемом состоянии

$$N^* = \langle N \rangle = \sum_{\mathbf{k}} 2v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} 2v_{\mathbf{k}}^2, \tag{4.51}$$

где Ω — объем образца. Подобно этому, мы можем вычислить среднеквадратичное отклонение для распределения $|\lambda_N|^2$. С помощью (4.48) находим

$$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \sum_{\mathbf{k}} 4u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\Omega}{(2\pi)^3}\int 4u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2\, d\mathbf{k}. \tag{4.52}$$

Поскольку разность $\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2$ пропорциональна объему Ω, а следовательно, и N^*, то полуширина кривой составляет примерно $\sqrt{N^*}$. Таким образом, относительные флуктуации числа частиц N очень малы, порядка $1/\sqrt{N^*}$. Напротив, величина $\sqrt{N^*}$ по-прежнему велика по сравнению с единицей; отсюда вытекает, что при увеличении или уменьшении N на небольшое число p изменение коэффициентов λ_N пренебрежимо мало,

$$\lambda_{N+p} \sim \lambda_N \quad \text{для} \quad p \ll \sqrt{N^*}. \tag{4.53}$$

Изучим теперь вопрос о соответствии матричных элементов произвольного оператора F, вычисленных с помощью φ_N или $\tilde{\varphi}$:

$$\langle\tilde{\varphi}|F|\tilde{\varphi}\rangle = \sum_{N,N'} \lambda_N\lambda_{N'}\langle\varphi_N|F|\varphi_{N'}\rangle. \tag{4.54}$$

Сначала предположим, что оператор F сохраняет число частиц; тогда

$$\langle\tilde{\varphi}|F|\tilde{\varphi}\rangle = \sum_N |\lambda_N|^2\langle\varphi_N|F|\varphi_N\rangle. \tag{4.55}$$

Матричный элемент $\langle\varphi_N|F|\varphi_N\rangle$ является медленно меняющейся функцией N, поэтому мы можем заменить его значением в точке максимума ($N = N^*$). Из условия $\sum_N |\lambda_N|^2 = 1$ находим

$$\langle\tilde{\varphi}|F|\tilde{\varphi}\rangle = \langle\varphi_{N^*}|F|\varphi_{N^*}\rangle. \tag{4.56}$$

Аналогично, если действие оператора F на φ_N дает состояние с $(N+p)$ частицами, то

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\varphi}|F|\tilde{\varphi}\rangle &= \sum_N \lambda_{N^*+p}\lambda_N\langle\varphi_{N+p}|F|\varphi_N\rangle \approx \\ &\approx \sum_N |\lambda_N|^2\langle\varphi_{N+p}|F|\varphi_N\rangle = \langle\varphi_{N^*+p}|F|\varphi_{N^*}\rangle.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Следовательно, использование функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_N$ приводит на практике к одинаковым результатам.

Определение энергии основного состояния

Пусть $\mathscr{H}$ — гамильтониан системы взаимодействующих электронов. Если бы мы работали с волновой функцией φ_N, то могли непосредственно применить вариационный принцип и искать минимум среднего

значения $\langle\varphi_N|\mathscr{H}|\varphi_N\rangle$. Если же используется волновая функция $\tilde{\varphi}$, то здесь имеется небольшое отличие: число частиц в системе более не фиксировано, поэтому мы должны минимизировать выражение

$$\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H}|\tilde{\varphi}\rangle - E_F\langle\tilde{\varphi}|N|\tilde{\varphi}\rangle, \tag{4.58}$$

где N — оператор числа частиц, а E_F — лагранжев множитель, который мы назовем энергией Ферми. Перечислим теперь члены, дающие вклад в $\mathscr{H} - E_F N$. Член, соответствующий кинетической энергии, равен

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_0 &= \sum_{\mathbf{k}\alpha}\xi_{\mathbf{k}}a^+_{\mathbf{k}\alpha}a_{\mathbf{k}\alpha},\\ \xi_{\mathbf{k}} &= \frac{\hbar^2k^2}{2m} - E_F.\end{aligned} \tag{4.59}$$

Член, соответствующий потенциальной энергии $\mathscr{H}_{вз}$, содержит матричные элементы, описывающие рассеяние двух электронов:

$$(\mathbf{k}\alpha)(\mathbf{k}'\beta)\to(\mathbf{k}+\mathbf{q},\ \alpha)(\mathbf{k}'-\mathbf{q},\ \beta),$$

$$\mathscr{H}_{вз} = \frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}\sum_{\substack{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}\\ \alpha,\beta}} V(\mathbf{k}+\mathbf{q},\ \mathbf{k}'-\mathbf{q};\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}')\,a^+_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\,\alpha}a^+_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\,\beta}a_{\mathbf{k}'\beta}a_{\mathbf{k}\alpha}. \tag{4.60}$$

При написании выражения (4.60) учтены законы сохранения импульса и полного спина.

Вероятность того, что в состоянии с волновой функцией $\tilde{\varphi}$ состояние $\mathbf{k}$ окажется занятым, равна $v^2_{\mathbf{k}}$. Поэтому кинетическая энергия имеет вид

$$\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H}_0|\tilde{\varphi}\rangle = 2\sum_{\mathbf{k}\alpha}\xi_{\mathbf{k}}v^2_{\mathbf{k}}. \tag{4.61}$$

В $\mathscr{H}_{вз}$ дают вклад следующие члены:

1. Диагональные члены $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \mathbf{k}, \mathbf{k}')$.
2. Обменные члены $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \mathbf{k}', \mathbf{k})$.
3. Члены $V(\mathbf{l}, -\mathbf{l}; \mathbf{k}, -\mathbf{k}) = V_{\mathbf{kl}}$, описывающие переход пары из состояния $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ в состояние $(\mathbf{l}\uparrow, -\mathbf{l}\downarrow)$.

Члены 1 и 2 дают вклад в $\mathscr{H}_{вз}$ уже в нормальном металле. Вскоре мы увидим, что их можно просто включить в $\xi_{\mathbf{k}}$, поэтому забудем о них на время. Интересующий нас вклад дают члены типа 3.

Для нахождения этого вклада разложим сначала волновую функцию $\tilde{\varphi}$ на два слагаемых $\varphi_{\mathbf{k}1}$ и $\varphi_{\mathbf{k}0}$, в которых парное состояние $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ соответственно занято или не занято. Согласно (4.48),

$$\tilde{\varphi} = u_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}0} + v_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}1}. \tag{4.62}$$

Подобно этому мы можем разложить $\tilde{\varphi}$ на четыре компоненты, описывающие заполнение двух различных парных состояний $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$

и $(\mathbf{l}\uparrow, -\mathbf{l}\downarrow)$:

$$\tilde{\varphi} = v_k v_l \varphi_{k1,\,l1} + u_l v_k \varphi_{k1,\,l0} + u_k v_l \varphi_{k0,\,l1} + u_k u_l \varphi_{k0,\,l0}. \tag{4.63}$$

При вычислении вклада V_{kl} в энергию взаимодействия $\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H}_{вз}|\tilde{\varphi}\rangle$ мы должны использовать компоненты

$$u_l v_k \langle \varphi_{k1,\,l0}|\mathscr{H}_{вз}|\varphi_{k0,\,l1}\rangle u_k v_l.$$

Матричный элемент, входящий в это выражение, равен просто V_{kl}. Таким образом,

$$\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H} - E_F N|\tilde{\varphi}\rangle = 2\sum_k \xi_k v_k^2 + \sum_{k,\,l} V_{kl} u_k v_k u_l v_l. \tag{4.64}$$

Для учета условия $u_k^2 + v_k^2 = 1$ при нахождении минимума выражения $\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H} - E_F N|\tilde{\varphi}\rangle$ удобно положить

$$u_k = \sin\theta_k, \quad v_k = \cos\theta_k. \tag{4.65}$$

Тогда

$$\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H} - E_F N|\tilde{\varphi}\rangle = 2\sum_k \xi_k \cos^2\theta_k + \frac{1}{4}\sum_{k,\,l} \sin 2\theta_k \sin 2\theta_l V_{kl}. \tag{4.66}$$

Минимизация дает

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta_k}\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H} - E_F N|\tilde{\varphi}\rangle = -2\sum_k \xi_k \sin 2\theta_k + \sum_{k,\,l} \cos 2\theta_k \sin 2\theta_l V_{kl},$$

или

$$\xi_k \operatorname{tg} 2\theta_k = \frac{1}{2}\sum_l V_{kl} \sin 2\theta_l. \tag{4.67}$$

Определим

$$\Delta_k = -\sum_l V_{kl} u_l v_l, \tag{4.68}$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}. \tag{4.69}$$

Тогда

$$\operatorname{tg} 2\theta_k = -\frac{\Delta_k}{\xi_k}, \tag{4.70}$$

$$2u_k v_k = \sin 2\theta_k = \frac{\Delta_k}{\varepsilon_k}, \tag{4.71}$$

$$-u_k^2 + v_k^2 = \cos 2\theta_k = -\frac{\xi_k}{\varepsilon_k}. \tag{4.72}$$

(Знак в последнем уравнении выбран таким образом, что для больших положительных значений ξ_k имеем $u_k=1$, $v_k=0$; тогда сумма $\sum_k 2v_k^2$, дающая полное число электронов, сходится.)

Подставляя выражение для $u_l v_l$ в (4.68), получаем, наконец, уравнение для Δ_k

$$\Delta_k = -\sum_l V_{kl} \frac{\Delta_l}{2\left(\xi_l^2 + \Delta_l^2\right)^{1/2}}. \tag{4.73}$$

Сразу заметим, что это уравнение всегда имеет тривиальное решение $\Delta_k = 0$, отвечающее выбору

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{для } \xi_k < 0, \\ 0 & \text{для } \xi_k > 0. \end{cases} \tag{4.74}$$

Соответствующая функция $\tilde{\varphi}$ равна просто

$$\tilde{\varphi}_n = \prod_{k<k_F} a_k^+ a_{-k}^+ \varphi_0. \tag{4.75}$$

Это волновая функция газа невзаимодействующих электронов. Она представляет собой слейтеровский детерминант, составленный из всех состояний с энергиями, меньшими $E_F = \hbar^2 k_F^2/2m$. Чтобы показать в явном виде, что могут быть также другие решения, используем упрощенное взаимодействие вида

$$V_{kl} = \begin{cases} -V, & \text{если } |\xi_k|, |\xi_l| \leqslant \hbar\omega_D, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.76}$$

Постоянная V считается положительной. Мы будем называть взаимодействие такого простого вида взаимодействием БКШ. Для этого случая легко показать, что

$$\Delta_k = \begin{cases} 0 & \text{для } |\xi_k| > \hbar\omega_D, \\ \Delta & \text{для } |\xi_k| \leqslant \hbar\omega_D, \end{cases} \tag{4.77}$$

причем величина Δ не зависит от $\mathbf{k}$. Задача состоит в вычислении Δ. Перепишем уравнение (4.73), просуммировав по всем направлениям $\mathbf{l}$ при фиксированном значении ξ_l. Это приводит к множителю $N(\xi_l)$, равному плотности состояний (по энергии) для данной ориентации спина в нормальном состоянии. Поскольку нас интересуют энергии, заключенные в интервале шириной $\hbar\omega_D \ll E_F$, мы можем вместо функции $N(\xi_l)$ подставить ее значение $N(0)$ на уровне Ферми:

$$\Delta = N(0) V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \Delta \frac{d\xi}{2\sqrt{\Delta^2 + \xi^2}}, \tag{4.78}$$

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\Delta^2 + \xi^2}} = \ln \frac{\hbar\omega_D + \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta^2}}{\Delta}. \tag{4.79}$$

Решение этого уравнения существует лишь при положительных значениях V (т. е. лишь в случае притяжения) и имеет вид

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\operatorname{sh}[1/N(0)V]}. \tag{4.80}$$

В дальнейшем мы будем интересоваться исключительно пределом слабой связи [$N(0)V \ll 1$], в котором

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V}. \tag{4.81}$$

Возникает вопрос: в какой мере оправдано использование этого предельного случая. Несколько позднее мы увидим, что температура перехода в этой простой модели определяется соотношением $\Delta = 1{,}75 k_B T_c$, т. е. $\exp[-1/N(0)V] = 0{,}88 T_c/\Theta_D$ (Θ_D — дебаевская температура, $\hbar\omega_D = k_B\Theta_D$). Для большинства сверхпроводящих металлов $\Theta_D \sim 300°$К, $T_c \sim 10°$К. Следовательно, из эмпирических соображений можно заключить, что $N(0)V < 0{,}3$. (Свинец и ртуть составляют исключение. Температура Дебая Θ_D у этих металлов очень низка, так что значения $N(0)V$ равны соответственно 0,39 и 0,35.)

Зная Δ, можно явно вычислить кинетическую и потенциальную энергии. В пределе слабой связи получаем из (4.64)

$$\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H}_0|\tilde{\varphi}\rangle = 2\sum_{k<k_F}\xi_k + \frac{\Delta^2}{V} - \frac{N(0)\Delta^2}{2}. \tag{4.82}$$

Здесь первый член равен кинетической энергии электронов в нормальном состоянии ($\Delta = 0$). Тем же путем находим

$$\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H}_{\text{вз}}|\tilde{\varphi}\rangle = -\frac{\Delta^2}{V}. \tag{4.83}$$

Разность энергий для состояния $\tilde{\varphi}$ и нормального состояния $\tilde{\varphi}_n$ равна

$$\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H}|\tilde{\varphi}\rangle - \langle\tilde{\varphi}_n|\mathscr{H}|\tilde{\varphi}_n\rangle_{(\Delta=0)} = -\frac{N(0)\Delta^2}{2}, \tag{4.84}$$

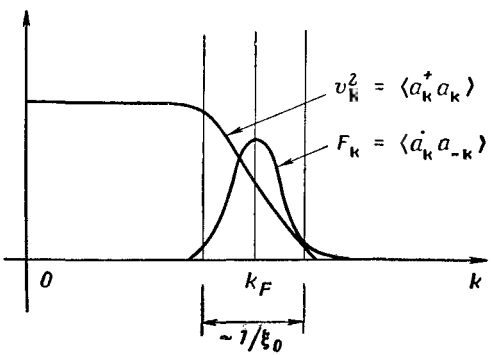
т. е. энергия конденсированного состояния ниже, чем нормального. Однако этот выигрыш оказывается чрезвычайно малым, порядка Δ^2/E_F на одну частицу. Для $\Delta = 10°$К и $E_F = 10^4°$К это дает $\Delta^2/E_F = 10^{-2}°$К. Энергию нормального состояния мы не можем вычислить с такой точностью. К счастью, члены, которыми мы пренебрегли при расчете, имеют почти одинаковую величину для нормального и для конденсированного состояний. Каждый из членов, входящих в (4.82), взятый по отдельности, не точен, но разность очень близка к точному значению, причем именно эта разность измеряется на опыте.

Исходя из вида $\tilde{\varphi}$, можно установить некоторые простые свойства конденсированного состояния.

а) Рассмотрим вероятность нахождения электрона в состоянии $|\mathbf{k}\alpha\rangle$ для конденсированной фазы. Согласно (4.70) и (4.55), эта вероятность равна

$$\langle\tilde{\varphi}|a^+_{\mathbf{k}\alpha}a_{\mathbf{k}\alpha}|\tilde{\varphi}\rangle = v^2_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi^2_{\mathbf{k}}+\Delta^2}}\right). \tag{4.85}$$

Функция $v^2_{\mathbf{k}}$ в зависимости от k показана на фиг. 41. Она дает распределение электронов по импульсам в основном состоянии. В принципе распределение $v^2_{\mathbf{k}}$ можно было бы получить на основе измерений, например, эффекта Комптона, аннигиляции позитронов в сверхпроводнике и т. д. Однако в действительности такие измерения



Фиг. 41. Функция распределения электронов по импульсам $|v_{\mathbf{k}}|^2$ в сверхпроводнике при $T=0$ и амплитуда конденсации $F_{\mathbf{k}}$.

В нормальном металле функция распределения скачком обращается в нуль при $k=k_F$; в сверхпроводнике этот спад происходит в интервале $\delta k \sim 1/\xi_0 \sim \Delta/\hbar v_F$.

в наиболее интересной области значений k потребовали бы очень высокой точности. В самом деле, $v_{\mathbf{k}}=1$ при $k \ll k_F$ и $v_{\mathbf{k}}=0$ при $k \gg k_F$. В отличие от нормального металла, где функция распределения имеет разрыв при $k=k_F$, в сверхпроводнике $v^2_{\mathbf{k}}$ меняется непрерывно. Область изменения $v_{\mathbf{k}}$ от нуля до единицы имеет ширину $\sim\Delta$ по энергии, а ее ширина по импульсу δk определяется из соотношения

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[(k_F+\delta k)^2 - k_F^2\right] \approx \Delta,$$

т. е.

$$\delta k \approx \frac{m\Delta}{\hbar^2 k_F} \approx \frac{\Delta}{\hbar v_F}. \tag{4.86}$$

б) Добавим к системе, описываемой волновой функцией φ_N, два электрона, которые первоначально находились в состояниях $\mathbf{k}\uparrow$ и $-\mathbf{k}\downarrow$. Спрашивается, чему равна амплитуда вероятности найти систему

в состоянии с волновой функцией φ_{N+2}? Обозначим эту амплитуду через $F_{\mathbf{k}}$. По определению,

$$F_{\mathbf{k}} = \langle \varphi_{N+2} | a^{+}_{\mathbf{k}\uparrow} a^{+}_{-\mathbf{k}\downarrow} | \varphi_N \rangle = \langle \tilde{\varphi} | a^{+}_{\mathbf{k}\uparrow} a^{+}_{-\mathbf{k}\downarrow} | \tilde{\varphi} \rangle. \tag{4.87}$$

Используя также определение $\tilde{\varphi}$, отсюда находим

$$F_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}. \tag{4.88}$$

Мы назовем $F_{\mathbf{k}}$ *амплитудой конденсации* в состоянии $\mathbf{k}$. Из (4.88) видно, что она отлична от нуля лишь в переходной области и имеет наибольшее значение при $k = k_F$ (см. фиг. 41).

Низшие возбужденные состояния

Мы построили волновую функцию φ_N, описывающую основное состояние, в котором все N частиц спарены. Добавим теперь к системе еще одну частицу в состоянии, описываемом плоской волной $(\mathbf{m}, \alpha)$. Тогда мы придем к волновой функции

$$\varphi_{N+1,\,\mathbf{m}\alpha}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{N+1}) = A\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \ldots \varphi(\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N) \times \\ \times e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_{N+1}} (1\uparrow) \ldots (N\downarrow)(N+1, \alpha). \tag{4.89}$$

Введем соответствующую ей производящую функцию

$$\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}\alpha} = \sum_N \lambda_N \varphi_{N+1,\,\mathbf{m}\alpha}. \tag{4.90}$$

Повторяя для $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}\alpha}$ рассуждения, проведенные выше для $\tilde{\varphi}$, находим

$$\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}\alpha} = \prod_{\mathbf{k}\neq\mathbf{m}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a^{+}_{\mathbf{k}\uparrow} a^{+}_{-\mathbf{k}\downarrow})\, a^{+}_{\mathbf{m}\alpha} \varphi_0. \tag{4.91}$$

Очевидно, что функция $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}\alpha}$ ортогональна к $\tilde{\varphi}$.

Вычислим энергию для состояния $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}\alpha}$. Для кинетической энергии можно написать

$$\langle \tilde{\varphi}_{\mathbf{m}\alpha} | \mathscr{H}_0 | \tilde{\varphi}_{\mathbf{m}\alpha} \rangle = \langle \tilde{\varphi} | \mathscr{H}_0 | \tilde{\varphi} \rangle + (1 - 2v^2_{\mathbf{m}})\, \xi_{\mathbf{m}}. \tag{4.92}$$

Это следует из того, что волновая функция $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}\alpha}$ соответствует случаю занятого состояния $\mathbf{m}\alpha$, тогда как волновая функция $\tilde{\varphi}$ описывает состояние, в котором суммарная вероятность нахождения электрона в состояниях $(\mathbf{m}\uparrow)$ и $(-\mathbf{m}\downarrow)$ равна $2v^2_{\mathbf{m}}$. Для нахождения потенциальной энергии заметим, что вклад в ее величину дают лишь члены, отвечающие переходам $(\mathbf{k}, \alpha)(-\mathbf{k}, -\alpha) \to (\mathbf{k}', \alpha)(-\mathbf{k}', -\alpha)$ для $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \neq \mathbf{m}$, поскольку при спаривании состояние $(\mathbf{m}\alpha)$ не может быть

использовано. Таким образом,

$$\langle\tilde{\varphi}_{m\alpha}|\mathscr{H}_{вз}|\tilde{\varphi}_{m\alpha}\rangle=\langle\tilde{\varphi}|\mathscr{H}_{вз}|\tilde{\varphi}\rangle-2\sum_{l}V_{ml}u_m u_l v_m v_l. \quad (4.93)$$

Полная энергия равна

$$\langle\tilde{\varphi}_{m\alpha}|\mathscr{H}|\tilde{\varphi}_{m\alpha}\rangle=E_0+(1-2v_m^2)\xi_m+2u_m v_m\Delta_m=$$

$$=E_0+\frac{\xi_m^2}{\varepsilon_m}+\frac{\Delta_m^2}{\varepsilon_m}=E_0+\varepsilon_m. \quad (4.94)$$

Поскольку E_0 — энергия основного состояния $\tilde{\varphi}$, величина $\varepsilon_m=\sqrt{\Delta_m^2+\xi_m^2}$ представляет собой энергию, необходимую для того, чтобы поместить новую частицу в состояние $(m\alpha)$. Отметим, что даже при $\xi_m=0$ энергия ε_m остается конечной и равной $\Delta_{k_F}=\Delta$.

Таким же путем мы могли бы попытаться построить состояния с 2, 3, ..., n возбуждениями. Например, для состояния с двумя возбуждениями напрашивается мысль взять волновую функцию в виде

$$\Xi_{m\alpha,\,n\beta}=\prod_{k\neq m,\,n}(u_k+v_k a_{k\uparrow}^{+}a_{-k\downarrow}^{+})\,a_{m\alpha}^{+}a_{n\beta}^{+}\varphi_0. \quad (4.95)$$

К сожалению, функции такого вида, вообще говоря, не ортогональны исходной функции $\tilde{\varphi}$. Так

$$\langle\tilde{\varphi}|\Xi_{m\uparrow-m\downarrow}\rangle=v_m\neq 0. \quad (4.96)$$

Эту трудность можно обойти двумя способами.

а) Добавим к Ξ слагаемое $\lambda\tilde{\varphi}$, в котором параметр λ выбирается с таким расчетом, чтобы результирующая функция стала ортогональной к $\tilde{\varphi}$. Этот метод использовали Бардин, Купер и Шриффер в своей оригинальной работе, однако на практике он неудобен.

б) Вернемся к волновой функции $\tilde{\varphi}_{m\alpha}$ для состояния с одним возбуждением и попытаемся представить ее в виде

$$\tilde{\varphi}_{m\alpha}=\gamma_{m\alpha}^{+}\tilde{\varphi}, \quad (4.97)$$

где $\gamma_{m\alpha}^{+}$ играет роль оператора рождения для элементарного возбуждения. Если бы нам удалось подобрать операторы γ^{+} и сопряженные им операторы γ таким образом, чтобы они 1) подчинялись фермионным правилам коммутации, 2) удовлетворяли соотношению $\gamma_{m\alpha}\tilde{\varphi}=0$ (т. е. функция $\tilde{\varphi}$ соответствовала состоянию без возбуждений), тогда можно было бы легко показать с помощью соотношений коммутации, что все состояния, полученные путем воздействия произвольного числа операторов γ^{+} на $\tilde{\varphi}$, нормированы, ортогональны друг к другу и к исходному основному состоянию $\tilde{\varphi}$.

С кинематической точки зрения удобство таких функций состоит в возможности описывать состояния с большим числом возбуждений.

Задача заключается, таким образом, в нахождении γ^+. В качестве первой попытки заметим, что

$$\tilde{\varphi}_{m\uparrow} = \frac{1}{u_m} a^+_{m\uparrow} \tilde{\varphi}. \tag{4.98}$$

Это соотношение легко проверить с помощью (4.91) и соотношений коммутации типа $a^+_{m\alpha} a^+_{m\alpha} = 0$ и т. д. Однако операторы $(1/u_m) a^+_{m\alpha}$ не подчиняются упомянутым правилам антикоммутации. В качестве второй попытки воспользуемся тем, что

$$\tilde{\varphi}_{m\downarrow} = \frac{1}{v_m} a_{m\uparrow} \varphi. \tag{4.99}$$

При использовании операторов $(1/v_m) a_{m\alpha}$ мы опять сталкиваемся с той же трудностью, связанной с правилами коммутации. Попытаемся теперь определить γ^+ как линейную комбинацию предыдущих операторов. Если положить

$$\begin{aligned} \gamma^+_{m\uparrow} &= u_m a^+_{m\uparrow} - v_m a_{-m\downarrow}, \\ \gamma^+_{m\downarrow} &= u_m a^+_{m\downarrow} + v_m a_{-m\uparrow}, \end{aligned} \tag{4.100}$$

тогда легко показать, что (4.97) и условия 1 и 2 будут выполнены. Например, справедливость условия 2 можно проверить следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_{m\uparrow} \tilde{\varphi} &= \prod_{k \neq m} \left(u_k + v_k a^+_{k\uparrow} a^+_{-k\downarrow}\right) \left(u_m a_{m\uparrow} - v_m a^+_{-m\downarrow}\right) \left(u_m + v_m a^+_{m\uparrow} a^+_{-m\downarrow}\right) \varphi_0 = \\ &= \prod_{k \neq m} \left(u_k + v_k a^+_{k\uparrow} a^+_{-k\downarrow}\right) u_m v_m \left(a^+_{-m\downarrow} - a^+_{-m\downarrow}\right) \varphi_0 = 0, \end{aligned} \tag{4.101}$$

где мы использовали соотношения $a_{-m\alpha}\varphi_0 = 0$, $a_{m\alpha} a^+_{m\alpha} \varphi_0 = \varphi_0$ и соотношения антикоммутации. Таким образом, мы нашли операторы γ^+, с помощью которых можно построить набор взаимно ортогональных возбужденных состояний, ортогональных также к основному состоянию. Операторы γ и γ^+ были введены независимо Боголюбовым [74, 75] и Валатином [76] в 1958 г. Использование этих операторов существенно упрощает все расчеты, так или иначе связанные с возбужденными состояниями. Возбуждения, порождаемые операторами γ^+, будем называть *квазичастицами*.

НЕСКОЛЬКО ФИЗИЧЕСКИХ ЗАМЕЧАНИЙ

а) Из того факта, что оператор $\gamma^+_{m\alpha}$ представляет собой линейную комбинацию операторов $a^+_{m\alpha}$ и $a_{-m,\,-\alpha}$, следует, что состояние $\varphi_{N+1,\,k\alpha}$ можно создать либо добавлением одного электрона $(k\alpha)$ к основному состоянию φ_N, либо удалением электрона $(-k\,-\alpha)$ из состояния φ_{N+2}.

б) Предположим, что исходным является основное состояние φ_N. Как мы уже видели, заполнение состояния $\mathbf{k}$ связано с затратой энергии не меньшей, чем $E_F + \Delta$. Такие опыты по „инжекции" электронов не являются чисто теоретическим построением. Их можно реально поставить, вводя электроны в сверхпроводник через тонкий оксидный слой. Впервые это было сделано Жавером [77] в 1959 г. Открытое им явление носит название туннельного эффекта (о чем уже упоминалось выше). С его помощью удается произвести измерение щели Δ.

в) Если не рассматривать туннельных экспериментов, то обычно при изучении возбужденных состояний число частиц N остается неизменным. Примером могут служить опыты по инфракрасному поглощению. Если число N четно, то первое возбужденное состояние рассматриваемого типа соответствует разрыву пары и описывается волновой функцией вида $\gamma^+_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^+_{\mathbf{l}\beta}\tilde{\varphi}$ ($\mathbf{k}\alpha \neq \mathbf{l}\beta$). Энергия возбуждения легко вычисляется и равна $\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{l}}$. Минимальное значение этой энергии (отвечающее порогу инфракрасного поглощения) равно 2Δ. Если число N нечетно ($N = 2K + 1$), то основное состояние содержит, помимо K пар, один неспаренный электрон. В этом случае в принципе возможны два сорта возбуждений: либо, как и раньше, происходит расщепление куперовской пары (щель равна 2Δ), либо изменяется состояние неспаренного электрона (щель отсутствует). Однако интенсивность поглощения для первого процесса по порядку в N раз больше, чем второго. На практике $N \sim 10^{23}$, поэтому всегда наблюдают порог поглощения, равный 2Δ.

г) Минимальная энергия возбуждения равна 2Δ, но энергия, приходящаяся на одну возбужденную частицу, составляет величину Δ. По этой причине при низких температурах вероятность нахождения частицы в возбужденном состоянии $\mathbf{k}$ ($k \approx k_F$) изменяется по закону $\sim \exp(-\Delta/k_B T)$.

Случай двух связанных сверхпроводников

Рассмотрим два сверхпроводника S и S', разделенных изолирующим слоем. Если толщина слоя велика, электроны не могут проходить через него и сверхпроводники S и S' полностью независимы. Однако если слой становится достаточно тонким (толщина менее 30 Å), то электроны могут проходить через него за счет туннельного эффекта. Это приводит к появлению связи между областями S и S', которую мы сейчас и рассмотрим. С формальной точки зрения прохождение электронов можно описать путем добавления к гамильтониану электронов $\mathscr{H}_{SS'}$ (для несвязанных между собой областей S и S') малого члена $\mathscr{H}_T$, вызывающего туннельные переходы электронов из S в S' и наоборот:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{SS'} + \mathscr{H}_T,$$
$$\mathscr{H}_T = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}} (a^+_{\mathbf{k}S} a_{\mathbf{l}S'} T_{\mathbf{kl}} + a^+_{\mathbf{l}S'} a_{\mathbf{k}S} T^+_{\mathbf{kl}}), \tag{4.102}$$

где оператор $a^+_{\mathbf{k}S}$ создает электрон в состоянии $\mathbf{k}$ в области S, а оператор $a_{\mathbf{l}S'}$ уничтожает электрон в состоянии $\mathbf{l}$ в области S'. Матричные элементы $T_{\mathbf{kl}}$ можно найти в явном виде, решив уравне-

ние Шредингера для одного электрона при наличии барьера. (Отметим, что полный гамильтониан $\mathscr{H}_{SS'}$ для областей S и S' включает взаимодействие V электронов между собой.) Собственные функции гамильтониана $\mathscr{H}_{SS'}$ будем искать в виде произведения двух функций типа (4.43), относящихся соответственно к областям S и S':

$$\psi_\nu = \varphi^{(S')}_{2(N-\nu)}\varphi^{(S)}_{2\nu}, \quad \mathscr{H}_{SS'}\psi_\nu = E_\nu\psi_\nu. \tag{4.103}$$

Функция ψ_ν описывает состояние всей системы, в котором в областях S и S' находятся соответственно 2ν и $2(N-\nu)$ спаренных электронов. Полное число электронов $2N$ предполагается фиксированным; число ν, напротив, заранее неизвестно.

Определим зависимость энергии E_ν от числа ν. Если увеличить ν на единицу, переместив два электрона из области S' в область S, то, согласно термодинамике,

$$E_{\nu+1} - E_\nu = 2\left[E_F^{(S)} - E_F^{(S')}\right], \tag{4.104}$$

где $E_F^{(S)}$ — химический потенциал (уровень Ферми) в области S. Предположим на время, что разность потенциалов между S и S' отсутствует, тогда $E_F^{(S)} = E_F^{(S')}$ и, следовательно, совокупность функций ψ_ν образует вырожденную систему ($E_\nu \equiv E$ независимо от ν). Возмущение $\mathscr{H}_T$ приводит к снятию этого вырождения. Матричный элемент, связывающий состояния ψ_ν и $\psi_{\nu+1}$, во втором порядке по $\mathscr{H}_T$ равен

$$J_0 = \sum_{\mathbf{k},\,l}\sum_{\mathbf{k}',\,l'} \langle \nu+1 | T_{\mathbf{k}l}a^+_{\mathbf{k}S}a_{l'S'} | I\rangle \frac{1}{E - E_I} \langle I | T_{\mathbf{k}'l'}a^+_{\mathbf{k}'S}a_{l'S'} | \nu\rangle, \tag{4.105}$$

где $|I\rangle$ обозначает промежуточное состояние, в котором $(2\nu+1)$ электронов находятся в области S и $2(N-\nu)-1$ электронов — в области S'. Гамильтониан $\mathscr{H}_T$ действует сначала на состояние, содержащее ν пар в области S, что приводит к появлению в этой области лишнего неспаренного электрона с волновым вектором $\mathbf{k}'$ (состояние $|I\rangle$). При последующем действии $\mathscr{H}_T$ на $|I\rangle$ в области S возникает второй неспаренный электрон в состоянии $\mathbf{k}$. Поскольку конечное состояние, на которое проецируется полученное состояние, содержит $(\nu+1)$ пар, то должно быть выполнено условие $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$. Аналогичным образом легко показать, что $l = -l'$. Воспользовавшись также соотношением симметрии $T_{-\mathbf{k}-l} = T^+_{\mathbf{k}l}$ и полученными ранее результатами для возбужденных состояний, находим

$$J_0 = -4\sum_{\mathbf{k},\,l} |T_{\mathbf{k}l}|^2 \frac{u_\mathbf{k}v_\mathbf{k}u_l v_l}{\varepsilon_\mathbf{k} + \varepsilon_l}. \tag{4.106}$$

Во втором порядке по возмущению $\mathscr{H}_T$ можно написать

$$\mathscr{H}\psi_\nu = E\psi_\nu + J_0(\psi_{\nu+1} + \psi_{\nu-1}). \tag{4.107}$$

Правильная волновая функция представляет собой линейную комбинацию функций ψ_ν. Рассматриваемая задача формально эквивалентна задаче о движении электрона в линейной цепочке атомов; функция ψ_ν есть аналог волновой функции электрона, локализованного на ν-ом атоме. В приближении сильно связанных электронов примем, что искомая волновая функция ψ_k в соответствии с теоремой Блоха имеет вид

$$\psi_k = \sum_\nu \psi_\nu e^{ik\nu}, \tag{4.108}$$

где k — аналог волнового вектора. Соответствующая энергия $E(k)$ равна

$$E(k) = E_0 + 2J_0 \cos k. \tag{4.109}$$

Построим теперь волновой пакет с помощью состояний ψ_k, волновой вектор которых заключен в интервале от k до $k + \Delta k$. Согласно используемой аналогии с линейной цепочкой, этот волновой пакет имеет пространственную протяженность $\Delta\nu \sim 1/\Delta k$. Так как число ν очень велико ($\nu \sim 10^{22}$), величину $\Delta\nu$ также можно считать весьма большой (например, $\Delta\nu \sim \sqrt{\nu} \sim 10^{11}$). В этом случае значения Δk и $\Delta\nu/\nu$ будут малыми ($\sim 10^{-11}$). Таким образом оказывается возможным одновременно задать с хорошей точностью значения k и ν. Групповая скорость движения пакета равна

$$\frac{d}{dt}\langle\nu\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{2J_0}{\hbar}\sin k. \tag{4.110}$$

Движению волнового пакета соответствует изменение со временем величины ν, т. е. *между S и S' должен течь ток*

$$I = 2e\frac{d}{dt}\langle\nu\rangle = -\frac{4eJ_0}{\hbar}\sin k. \tag{4.111}$$

Другими словами, если систему SS' включить в замкнутую цепь, то по ней может протекать ток ($< 4eJ_0/\hbar$) *при нулевой разности потенциалов*. Уравнение (4.111) позволяет понять на простом примере возникновение сверхтекучих свойств в конденсированном состоянии. Отметим, что для нормальной системы ($u_k v_k \equiv 0$), согласно (4.106), $J_0 = 0$. Рассмотренный эффект был предсказан Джозефсоном [78] в 1961 г. и впервые наблюдался Андерсоном и Роуэллом [79]. (Типичное значение плотности тока составляет $\sim 10^{-2}$ *а/см*^{2}.) Приведенный здесь вывод принадлежит Феррелу [80].

Как изменятся эти результаты при наличии разности потенциалов V между S и S'? В этом случае $E_{\nu+1} - E_\nu = 2eV$, и мы имеем полную аналогию с задачей об атомной цепочке в однородном электрическом поле. Движение волнового пакета описывается „урав-

нением Ньютона"

$$\frac{d}{dt}\langle \hbar k\rangle = 2eV. \tag{4.112}$$

Уравнения (4.111) и (4.112) полностью определяют поведение туннельного контакта. В частности, если напряжение V поддерживается постоянным, то k линейно растет со временем, а ток I изменяется синусоидально с частотой $2eV/\hbar$.

Задача. Джозефсоновский контакт SS' последовательно включается в цепь, состоящую из сопротивления R и генератора напряжения U. Вычислить ток.

Р е ш е н и е. Напряжение на контакте равно

$$V = U - RI = U + \frac{4eJ_0R}{\hbar}\sin k.$$

Согласно (4.112),

$$\frac{dk}{dt} = \frac{2e}{\hbar}\left(U + \frac{4eJ_0R}{\hbar}\sin k\right) = \omega_0(1 - \lambda \sin k),$$

где

$$\omega_0 = \frac{2eU}{\hbar}, \qquad \lambda = -\frac{4eJ_0R}{\hbar U} = \frac{RJ_m}{U},$$

а J_m — максимальный сверхпроводящий ток, который может течь через контакт.

Интегрирование уравнения движения легко выполнить. В результате имеем

$$\omega_0(t - t_0) = \int \frac{dk}{1 - \lambda \sin k}.$$

Рассмотрим два случая.

а) Если $\lambda > 1$, то знаменатель подынтегрального выражения имеет полюс при $k = k_0$ ($\sin k_0 = 1/\lambda$). В этом случае $k \to k_0$ при $t \to \infty$, т. е. ток стремится к своему предельному значению U/R. При достижении током этого значения напряжение на контакте, равное $U - RI$, падает до нуля. Таким образом, возможен режим, в котором ток остается постоянным во времени.

б) Если $\lambda < 1$, то знаменатель не может обратиться в нуль. Интеграл берется в явном виде. Положив

$$m = \operatorname{tg}\frac{k}{2}, \qquad I = \frac{2J_m m}{1+m^2},$$

в результате интегрирования найдем

$$m = \lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,\omega_0(t - t_0)\right],$$

т. е. m, а следовательно, и k являются периодическими функциями времени с периодом, равным $2\pi/\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$. Отметим, что при этих условиях ток не синусоидален, за исключением случая, когда $\lambda = 0$.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Определение свободной энергии

При $T \neq 0$ происходит тепловое возбуждение состояний $\gamma_k^+\tilde{\varphi}$, $\gamma_k^+\gamma_l^+\tilde{\varphi}$ и т. д. При низких температурах ($k_BT \ll \Delta$) возбуждений мало и их можно считать независимыми. Однако, когда величина k_BT становится сравнимой с Δ, число возбуждений велико. Мы изучим теперь *усредненный* эффект взаимодействия между возбуждениями и покажем, что его просто можно описать, допустив изменение энергетической щели Δ с температурой.

Фермионные операторы γ_k^+ будем задавать по-прежнему с помощью преобразования (4.100), параметры которого u_k и v_k пока не определены. Возбуждения системы будем трактовать как газ независимых квазичастиц; вероятность найти квазичастицу в состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}$ и спином α [1]) при температуре T равна

$$f_{k\alpha} = \langle \gamma_{k\alpha}^+ \gamma_{k\alpha} \rangle = 1 - \langle \gamma_{k\alpha} \gamma_{k\alpha}^+ \rangle. \tag{4.113}$$

Символ $\langle\ \rangle$ означает усреднение по Гиббсу. Мы построим сначала выражение для свободной энергии, пригодное при произвольной функции распределения f_k, а затем будем отыскивать ее минимум по u_k, v_k и f_k.

1. Вычисление средней кинетической энергии с помощью (4.92) дает

$$\langle \mathscr{H}_0 \rangle = \sum_{k\alpha} \xi_k \left[u_k^2 \langle \gamma_{k\alpha}^+ \gamma_{k\alpha} \rangle + v_k^2 \langle \gamma_{k\alpha} \gamma_{k\alpha}^+ \rangle \right] =$$
$$= \sum_k 2\xi_k \left[u_k^2 f_k + v_k^2 (1 - f_k) \right]. \tag{4.114}$$

2. В потенциальную энергию в рамках рассматриваемого приближения по-прежнему дают вклад лишь члены, описывающие рассеяние

$$(\mathbf{k}\uparrow,\ -\mathbf{k}\downarrow) \to (\mathbf{l}\uparrow,\ -\mathbf{l}\downarrow),$$

т. е.

$$\langle \mathscr{H}_{\text{вз}} \rangle = \sum_{k,l} \langle a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ a_{-l\downarrow} a_{l\uparrow} \rangle V_{kl}. \tag{4.115}$$

В этом выражении операторы a^+, a являются линейными комбинациями операторов γ^+ и γ, описывающих систему независимых фермионов. Имеет место следующее простое свойство:

$$\langle 0_1 0_2 0_3 0_4 \rangle = \langle 0_1 0_2 \rangle \langle 0_3 0_4 \rangle + \langle 0_1 0_4 \rangle \langle 0_2 0_3 \rangle - \langle 0_1 0_3 \rangle \langle 0_2 0_4 \rangle, \tag{4.116}$$

[1]) В большинстве случаев функция $f_{k\alpha}$ не зависит от α, поэтому обычно мы будем писать просто f_k.

где под символом 0 подразумевается оператор a или a^+. Это свойство (частный случай теоремы Вика) можно проверить, явно выражая операторы a через γ и производя усреднение. Применение тождества (4.116) позволяет сильно упростить последующие вычисления. В данном случае взаимодействие содержит три члена. Два из них включают средние вида $\langle a_k^+ a_k\rangle$ и приводят к поправкам типа Хартри и поправкам, имеющим обменное происхождение. Обе поправки в основном не зависят от температуры. Поэтому, как и раньше, мы их всюду будем опускать. Остающийся член вида $\langle a^+a^+\rangle\langle aa\rangle$ дает

$$\langle \mathscr{H}_{\text{вз}}\rangle = \sum_{k,\,l} V_{kl} u_k v_k u_l v_l (1-2f_k)(1-2f_l). \tag{4.117}$$

3. Энтропия S системы невзаимодействующих фермионов описывается выражением

$$S = -k_B \sum_{k\alpha} [f_k \ln f_k + (1-f_k)\ln(1-f_k)]. \tag{4.118}$$

4. Свободная энергия имеет вид

$$F = \langle \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_{\text{вз}}\rangle - TS. \tag{4.119}$$

Потребуем сначала стационарности выражения для F относительно u_k и v_k. Снова полагая $u_k = \sin\theta_k$ и $v_k = \cos\theta_k$, получаем условие

$$2\xi_k(1-2f_k)\sin 2\theta_k = \sum_l V_{kl}\cos 2\theta_k \sin 2\theta_l (1-2f_k)(1-2f_l). \tag{4.120}$$

Если ввести определение

$$\Delta_k = -\frac{1}{2}\sum_l V_{kl}\sin 2\theta_l (1-2f_l), \tag{4.121}$$

то опять приходим к системе уравнений (4.69)—(4.72). Единственное видоизменение связано с тем, что выражение (4.121) для Δ_k в отличие от (4.68) содержит числа заполнения для возбуждений. Минимизируя выражение для F по отношению к f_k, получаем

$$2\xi_k(u_k^2 - v_k^2) - 4\sum_l V_{kl} u_k v_k u_l v_l (1-2f_l) + 2k_B T \ln\frac{f_k}{1-f_k} = 0. \tag{4.122}$$

Отсюда с помощью (4.69)—(4.72) находим

$$f_k = \frac{1}{1+\exp(\varepsilon_k/k_B T)}. \tag{4.123}$$

Это обычный вид функции распределения свободных фермионов по энергиям ε_k. Однако зависимость f_k от температуры не является столь простой, потому что ε_k и Δ_k теперь зависят от температуры.

Изменение щели с температурой и точка перехода

Условие самосогласованности, аналогичное уравнению (4.73), имеет вид

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{kl}} \frac{\Delta_{\mathbf{l}}}{2\varepsilon_{\mathbf{l}}} [1 - 2f(\varepsilon_{\mathbf{l}})]. \tag{4.124}$$

Возьмем сначала в качестве $V_{\mathbf{kl}}$ простое по форме взаимодействие БКШ [см. (4.76)]. Тогда уравнение (4.124) примет вид

$$1 = N(0)V \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}} \left[1 - 2f\left(\sqrt{\xi^2+\Delta^2}\right)\right]. \tag{4.125}$$

Это уравнение определяет в неявной форме зависимость Δ от T. При $T = 0$, полагая фермиевскую функцию $f(\varepsilon)$ равной нулю ($\varepsilon > 0$), мы снова возвращаемся к уравнению (4.79). Для общего случая вид $\Delta(T)$ приведен на фиг. 42, откуда видно, что величина щели $\Delta(T)$ уменьшается при повышении температуры T и, наконец, щель исчезает при определенной температуре T_c. Выше T_c единственным решением уравнения (4.124) является $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$ (нормальное состояние). Таким образом, T_c представляет собой температуру перехода между S- и N-состояниями (в нулевом магнитном поле). Величину T_c можно найти, положив в (4.125) $\Delta = 0$:

$$1 = N(0)V \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2k_B T_c}. \tag{4.126}$$

В случае $\hbar\omega_D \gg k_B T_c$ ясно, что интеграл имеет асимптотический вид

$$\ln \frac{\hbar\omega_D}{k_B T_c} + C,$$

поскольку в большей части области интегрирования гиперболический тангенс можно положить равным единице. Более точный расчет показывает, что $C = \ln 1{,}14$. Следовательно,

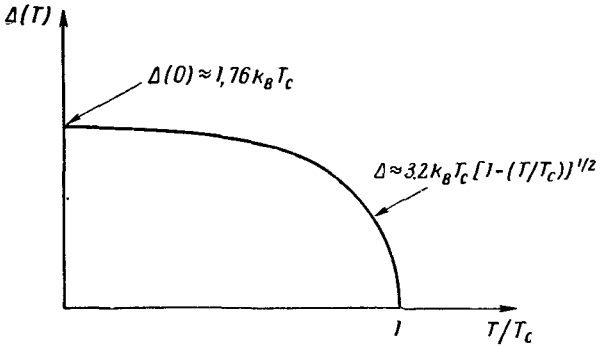
$$1 = N(0)V \ln \frac{1{,}14\hbar\omega_D}{k_B T_c},$$

или

$$k_B T_c = 1{,}14\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V}. \tag{4.127}$$

Полагая в (4.127) $\hbar\omega_D = k_B\Theta_D$ и беря значения дебаевской температуры Θ_D из измерений теплоемкости в нормальном состоянии, можно связать величину $N(0)V$ с критической температурой T_c. Соответ-

ствующие значения для непереходных металлов приведены в табл. 4. В большинстве случаев $T_c \ll \Theta_D$, т. е. константа связи $N(0)V$ очень мала; исключение составляют лишь свинец и ртуть (по-видимому, метод самосогласованного поля в случае этих металлов дает не очень



Фиг. 42. Зависимость параметра порядка Δ от температуры T, следующая из теории БКШ.

Таблица 4

Экспериментальные значения Θ_D, T_c и константы связи $N(0)V$

Металл	Θ_D, °К	T_c, °К	$[N(0)V]_{эксп}$
Zn	235	0,9	0,18
Cd	164	0,56	0,18
Hg	70	4,16	0,35
Al	375	1,2	0,18
In	109	3,4	0,29
Tl	100	2,4	0,27
Sn	195	3,75	0,25
Pb	96	7,22	0,39

большую точность). Как видно из экспоненциальной формы (4.127), для $N(0)V < 0{,}1$ и $\Theta_D \approx 200$°К температура T_c попадает в область значений $\sim 10^{-3}$ °К. При столь низких значениях T_c сверхпроводимость может быть подавлена за счет различных посторонних явлений (таких, как магнитное поле Земли, влияние ядерных спинов и т. п.). Поэтому вполне возможно, что в некоторых металлах, сверхпроводимость которых до сих пор ясно не установлена, взаимодействие носит характер притяжения. Наконец, отметим, что качественные предсказания, сделанные на основе модели „желе“,

оправдываются на опыте в том отношении, что для больших значений валентности Z и больших атомных объемов v_0 наблюдаются большие значения константы связи $N(0)V$ [1]).

Изотопический эффект

Для взаимодействия БКШ [см. (4.76)] температура перехода T_c пропорциональна частоте обрезания ω_D. Как уже упоминалось ранее, два изотопа с одинаковыми электронными свойствами, но различными массами ионов обладают различными значениями частоты ω_D, изменяющимися как $M^{-1/2}$. (Этот результат является общим. Он следует из того факта, что сила F, входящая в уравнение движения иона $M(d^2x/dt^2) = F$, не зависит от массы иона.) Таким образом, из выражения (4.127) следует изотопический эффект $T_c \sim M^{-1/2}$. Такая зависимость наблюдается на опыте для целого ряда непереходных металлов (Hg, Pb, Mg, Sn, Tl). Однако во многих других сверхпроводниках (переходные металлы и соединения) изотопический эффект менее выражен и даже отсутствует совсем (Ru, Os). Предложены различные механизмы для объяснения этих отклонений, которые в основном можно свести к следующим двум:

1. Предполагается, что взаимодействие по-прежнему обусловлено фононами, однако использованная в теории БКШ форма для $V_{\mathbf{kl}}$ является чересчур упрощенной.

2. Принимается, что взаимодействие обусловливается другими (т. е. не связанными с движением решетки) низкочастотными возбуждениями.

Второе объяснение можно с определенным успехом применить в ряде случаев, но его правильность очень трудно доказать (или опровергнуть) экспериментально. Здесь мы обсудим только первое объяснение.

Учет кулоновского отталкивания

При обсуждении электрон-электронных взаимодействий в начале этой главы мы получили два члена. Первый член описывает кулоновское отталкивание (в основном не зависящее от частоты), а второй — притяжение, обусловленное фононами. (Этот член существен при частотах $\omega < \omega_D$, но становится пренебрежимо малым для больших частот $\omega \gg \omega_D$.)

Пренебрежем, как и раньше, зависимостью матричного элемента $V_{\mathbf{kl}}$ от угла между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ и запишем его в виде

$$V_{\mathbf{kl}} = V(\omega) = V_c - V_p(\omega), \qquad \omega = \frac{\xi_{\mathbf{l}} - \xi_{\mathbf{k}}}{\hbar}. \tag{4.128}$$

[1]) Однако при количественном сравнении обнаруживается, что модель „желе" приводит к завышенным значениям для $N(0)V$ даже при учете кулоновского отталкивания.

Уравнение (4.126), определяющее температуру перехода, тогда заменится следующим:

$$\Delta(\xi) = -N(0)\int d\xi' V\left(\frac{\xi-\xi'}{\hbar}\right)\Delta(\xi')\frac{1-2f(\xi')}{2\xi'}. \qquad (4.129)$$

К сожалению, это интегральное уравнение очень трудно решить даже для простого взаимодействия (4.128), поэтому наше дальнейшее рассмотрение будет весьма приближенным. Выделим в (4.129) вклад от кулоновского члена и обозначим его через A

$$A = -N(0)\int d\xi' V_c \Delta(\xi')\frac{1-2f(\xi')}{2\xi'}. \qquad (4.130)$$

Очевидно, что величина A не зависит от ξ. Уравнение для Δ примет вид

$$\Delta(\xi) = N(0)\int d\xi' V_p\left(\frac{\xi-\xi'}{\hbar}\right)\Delta(\xi')\frac{1-2f(\xi')}{2\xi'} + A. \qquad (4.131)$$

При $|\xi| \gtrsim \hbar\omega_D$ интеграл не может быть большим, так как множители $V_p(\xi-\xi')$ и $1/\xi'$ не могут одновременно принимать больших значений. Поэтому в этой области весьма приближенно можно положить $\Delta(\xi) = A$. Наоборот, в области малых значений $|\xi|$ интеграл становится существенным. Обозначим через B среднее значение Δ в области $\hbar\omega_D > |\xi|$. Тогда имеем

$$B \approx N(0)V_p\int\limits_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi' B\frac{1-2f(\xi')}{2\xi'} + A \approx$$

$$\approx N(0)V_p B\ln\frac{\hbar\omega_D}{k_B T_c} + A, \qquad (4.132)$$

где V_p — некоторым образом усредненное значение $V_p(\omega)$ на интервале $-\omega_D < \omega < \omega_D$. Наконец, уравнение (4.130), определяющее A, можно представить в виде

$$A \approx -N(0)V_c\left(B\int\limits_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} + A\int\limits_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} + A\int\limits_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_c} + A\int\limits_{-\hbar\omega_c}^{\hbar\omega_D}\right)d\xi'\frac{1-2f(\xi')}{2\xi'} \approx$$

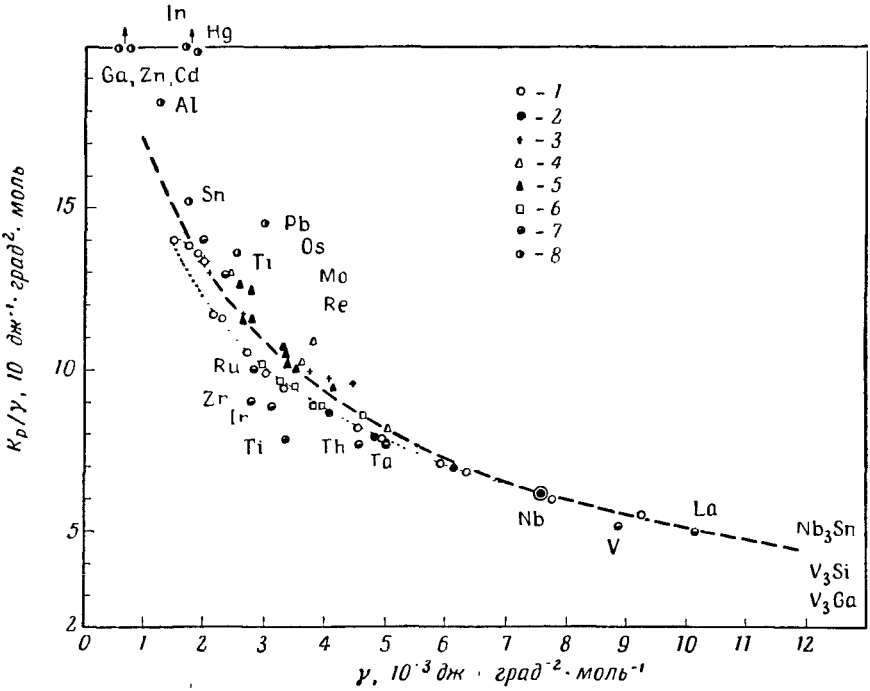
$$\approx -N(0)V_c\left(B\ln\frac{\hbar\omega_D}{k_B T_c} + A\ln\frac{\omega_c}{\omega_D}\right), \qquad (4.133)$$

где ω_c — частота обрезания (практически порядка $E_F/\hbar$) для кулоновского взаимодействия. Из условия совместности выражений

(4.133) и (4.132) получаем

$$1 = \ln\frac{\hbar\omega_D}{k_B T_c}\left[K_p - \frac{K_c}{1 + K_c \ln(\omega_c/\omega_D)}\right], \qquad K_p = N(0)V_p, \quad K_c = N(0)V_c. \tag{4.134}$$

Уравнение вида (4.134) для температуры перехода впервые было получено Толмачевым (см. [75]) в 1958 г. Из него можно вывести ряд интересных следствий.



Фиг. 43. Соотношение между константой связи K_p электрон-электронного взаимодействия, обусловленного фононами, и параметром γ для электронной теплоемкости в нормальном состоянии, полученное на основании опытных данных для ряда элементов и соединений (Бюхер и др. [137]).

1) Nb—Mo, Nb—Zr; *2*) Nb—Ru; *3*) Mo—Re, *4*) Nb—Re, Mo—Re (α-Mn); *5*) σ-фазы (элементы второй и третьей переходных групп); *6*) Mo—Ru, Mo—Pd, Mo—Tc; *7*) переходные элементы; *8*) B-металлы.

1. Кулоновское отталкивание, описываемое с помощью K_c, не очень эффективно препятствует появлению сверхпроводимости из-за наличия множителя

$$\frac{1}{1 + K_c \ln(\omega_c/\omega_D)}.$$

В частности, может оказаться, что даже при $K_p < K_c$ (т. е. в том случае, когда во всей области константа взаимодействия соответствует отталкиванию) сверхпроводимость тем не менее сохраняется, если выполнено условие

$$K_p\left(1 + K_c \ln\frac{\omega_c}{\omega_D}\right) > K_c.$$

2. Изотопический эффект претерпевает изменения. При относительном изменении массы иона на $\delta M/M$ дебаевская частота получает соответствующее приращение $\delta\omega_D/\omega_D = -\delta M/2M$ и температура перехода смещается по закону

$$\frac{\delta T_c}{T_c} = \frac{\delta\omega_D}{\omega_D}\left[1 - \frac{K_c^2}{1 + K_c \ln(\omega_c/\omega_D)}\right],$$

т. е. величина изотопического эффекта уменьшается. Особенно сильным это уменьшение должно быть для металлов с узкими зонами (частота ω_c мала). Возможно, по этой причине изотопический эффект слабо выражен в переходных металлах и их соединениях [81].

Наоборот, используя экспериментальные значения критической температуры T_c и величины изотопического эффекта, а также предполагая справедливость описанной модели, можно оценить величины K_p и K_c. Результаты, полученные для самых различных металлов, показывают сильную корреляцию между величиной K_p и коэффициентом γ, который входит в выражение для электронной теплоемкости нормальной фазы [1]) (фиг. 43).

Вычисление термодинамических величин

Объединяя выражения для кинетической и потенциальной энергий (4.114) и (4.115) и используя выражения (4.69) — (4.72) для $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$, находим полную энергию

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}\{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})^2 f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) - (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})^2 [1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}})]\}. \qquad (4.135)$$

В частности, при абсолютном нуле ($f = 0$) мы возвращаемся к выражению для энергии, полученному в § 3. Для энтропии (4.118) найдем

$$TS = 2\sum_{\mathbf{k}}\left[\varepsilon_{\mathbf{k}} f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) + k_B T \ln\left(1 + e^{\varepsilon_{\mathbf{k}}/k_B T}\right)\right]. \qquad (4.136)$$

[1]) Коэффициент γ пропорционален плотности состояний на уровне Ферми. Однако между γ и $N(0)$ имеется различие: коэффициент γ обычно берется в расчете на один атом, тогда как плотность состояний $N(0)$ — на единицу объема.

Теплоемкость, по определению, равна

$$C = T\frac{dS}{dT}. \tag{4.137}$$

Имея в виду, что энергия $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ зависит от T, получаем, используя (4.136),

$$C_s = 2\beta^2 k_B \sum_{\mathbf{k}} f(\varepsilon_{\mathbf{k}})[1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}})]\left(\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \beta\varepsilon_{\mathbf{k}}\frac{d\varepsilon_{\mathbf{k}}}{d\beta}\right) \tag{4.138}$$

(где $\beta = 1/k_B T$). В приближении БКШ $(d\varepsilon_{\mathbf{k}}/dT)\,\varepsilon_{\mathbf{k}} = (d\Delta/dT)\,\Delta$ (независимо от $\mathbf{k}$). Тогда

$$C_s = 2\beta^2 k_B N(0)\int_0^\infty d\xi f(\varepsilon)[1 - f(\varepsilon)]\left(\varepsilon^2 - T\Delta\frac{d\Delta}{dT}\right), \tag{4.139}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}.$$

Ход теплоемкости показан на фиг. 1.

При очень низких температурах ($\beta\Delta \gg 1$) членом $(d\Delta/dT)\,\Delta$ можно пренебречь

$$C_s \sim 2\beta^2 k_B N(0)\Delta^2\int_0^\infty d\xi e^{-\beta\sqrt{\Delta_0^2+\xi^2}} \sim$$

$$\sim 2\beta^2 k_B N(0)\Delta^2 e^{-\beta\Delta_0}\int_0^\infty d\xi e^{-\beta\xi^2/2\Delta_0}, \tag{4.140}$$

где $\Delta_0 = \Delta(T = 0)$. Фигурирующий здесь интеграл равен

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{k_B T}{\Delta_0}\right)^{1/2}.$$

Температурная зависимость теплоемкости C_s в основном определяется множителем $\sim\exp(-\beta\Delta_0)$, как и предполагалось ранее. Из измерений теплоемкости при низких температурах можно определить величину Δ_0.

Наличие члена $(d\Delta/dT)\,\Delta$ в выражении (4.139) приводит к скачку теплоемкости в точке перехода в сверхпроводящее состояние

$$C_s - C_n = k_B N(0)\beta_c^2\left[\frac{d(\Delta^2)}{d\beta}\right]_{T_c}, \tag{4.141}$$

$$\beta_c = (k_B T_c)^{-1}.$$

Численный расчет с помощью (4.125) дает $(d\Delta^2/d\beta)_{T_c} = 10{,}2\beta_c^3$, т. е.

$$C_s - C_n = 10{,}2 k_B^2 T_c N(0). \tag{4.142}$$

Согласно (4.119), плотность свободной энергии F_s представляет собой разность выражений (4.135) и (4.136):

$$F_s = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \left[(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})^2 f_{\mathbf{k}} + (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})^2 (f_{\mathbf{k}} - 1) - 4 f_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2)\right] =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(-\varepsilon_{\mathbf{k}} + \frac{\Delta^2}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}\right)(2f_{\mathbf{k}} + 1) + \xi_{\mathbf{k}}\right]. \quad (4.143)$$

Это выражение можно несколько упростить, заметив, что

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{2f_{\mathbf{k}} + 1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \Delta^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{(2f_{\mathbf{k}} - 1)\Delta^2}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}}},$$

где первый член в правой части в приближении БКШ, согласно условию (4.124), равен $-\Delta^2/V$. Таким образом,

$$F_s = -\frac{\Delta^2}{V} + \sum_{\mathbf{k}} \left[-2\varepsilon_{\mathbf{k}} f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) + \xi_{\mathbf{k}} - \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}}}\right]. \quad (4.144)$$

Зная F_s, мы можем найти термодинамическое критическое поле H_c из соотношения (см. гл. II)

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (4.145)$$

В частности, при $T = 0$ ($H_c = H_{c0}$)

$$H_{c0}^2 = 4\pi N(0) |\Delta(0)|^2.$$

Детальный расчет с помощью (4.144) показывает, что при конечных температурах T кривая $H_c(T)$ весьма близка к эмпирической зависимости

$$\frac{H_c(T)}{H_{c0}} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2. \quad (4.146)$$

Однако оказывается, что для сверхпроводников со слабой связью [параметр $N(0)\,V$ не слишком велик] получающаяся из теории БКШ зависимость H_c от T находится в лучшем количественном согласии с опытными данными, чем упрощенная формула (4.146).

Формулы для вероятностей переходов

Предположим, что на электроны сверхпроводника действует внешнее зависящее от времени возмущение, например ультразвук или микроволновое поле. Рассмотрим эти два случая.

1. Ультразвук. Продольная акустическая волна изменяет потенциальную энергию каждого электрона на $U\theta(\boldsymbol{r}, t)$, где θ — локальное

искажение решетки, U — постоянная (так называемый „деформационный потенциал"). По порядку величина U равна нескольким электронвольтам. Матричный элемент этого возмущения для переходов электрона из состояния $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}'$ равен $U\theta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ (где $\theta_{\mathbf{q}}$ — фурье-компонента $\theta(\mathbf{r})$). Возмущение, действующее на всю систему электронов, запишется в виде

$$\mathscr{H}_1 = \sum_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}',\,\alpha} U\theta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} a^+_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}'\alpha}. \tag{4.147}$$

2. Микроволновое поле. При наличии электромагнитного возмущения, описываемого вектором-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, энергия электрона становится равной $(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2/2m$. В первом приближении по $\mathbf{A}$ возмущение имеет вид $(-e/2mc)(\mathbf{pA} + \mathbf{Ap})$, или, записывая его через операторы a и a^+,

$$\mathscr{H}_1 = -\sum_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'\,\alpha} \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{A}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{k}')\, a^+_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}'\alpha}. \tag{4.148}$$

В общем случае, таким образом, возмущение можно записать в виде

$$\mathscr{H}_1 = \sum_{\mathbf{k},\,\alpha,\,\mathbf{k}',\,\alpha'} B(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha')\, a^+_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}'\alpha'}. \tag{4.149}$$

Под влиянием $\mathscr{H}_1$ возникают следующие два эффекта:

1. Возмущение $\mathscr{H}_1$ индуцирует переходы между различными возбужденными состояниями, описываемыми с помощью операторов γ^+. Для классификации этих переходов выразим $\mathscr{H}_1$ через операторы γ и γ^+. Обращая выражение (4.100), получаем

$$\begin{gathered} a^+_{m\alpha} = u_m \gamma^+_{m\alpha} + \sum_{\beta} \rho_{\alpha\beta} v_m \gamma_{-m\beta}, \\ \rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.150}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_1 = \sum_{\mathbf{k}\alpha,\,\mathbf{k}'\alpha'} B(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha') \Big(& u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} \gamma^+_{\mathbf{k}\alpha} \gamma_{\mathbf{k}'\alpha'} + \\ & + v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} \sum_{\beta,\,\beta'} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\alpha'\beta'} \gamma_{\mathbf{k}\beta} \gamma^+_{\mathbf{k}'\beta'} + u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} \sum_{\beta'} \rho_{\alpha'\beta'} \gamma^+_{\mathbf{k}\alpha} \gamma^+_{-\mathbf{k}'\beta'} + \\ & + u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} \sum_{\beta} \rho_{\alpha\beta} \gamma_{-\mathbf{k}\beta} \gamma_{\mathbf{k}'\alpha'} \Big). \end{aligned} \tag{4.151}$$

Члены $\gamma^+_i \gamma_j$ и $\gamma_i \gamma^+_j$ описывают переходы, при которых квазичастица рассеивается из состояния i в состояние j (и наоборот). Член $\gamma^+_i \gamma^+_j$ приводит к рождению двух квазичастиц в состояниях i и j, а член $\gamma_i \gamma_j$ — к уничтожению их.

2. Возмущение $\mathscr{H}_1$ может модулировать параметры системы (например, параметр Δ), описывающие структуру конденсированного состояния. Такая модуляция также приводит к поглощению энергии. Во многих случаях, однако, этим эффектом можно пренебречь. Рассмотрим, например, задачу о поглощении ультразвука. Исходное возмущение имеет вид $U\theta(\mathbf{r})$. При модуляции потенциал спаривания изменяется на величину $\delta\Delta = C\Delta\theta(\mathbf{r})$, где C — постоянная порядка единицы. Это в свою очередь приводит к изменениям самосогласованного поля. Поскольку U имеет порядок 1—10 *эв*, а $C\Delta$ — порядок 10^{-3} *эв*, ясно, что модуляция Δ в этом случае несущественна[1]). Забудем поэтому на некоторое время об этом эффекте (позже в связи с рассмотрением эффекта Мейсснера мы вернемся еще раз к затронутому здесь вопросу).

Обратимся теперь к выражению (4.151) для $\mathscr{H}_1$ и рассмотрим процессы, при которых квазичастица переходит из состояния $(\mathbf{k}'\alpha')$ в состояние $(\mathbf{k}\alpha)$. Соответствующий матричный элемент $M(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha')$ равен коэффициенту при $\gamma^+_{\mathbf{k}\alpha}\gamma_{\mathbf{k}'\alpha'}$. С учетом соотношения $\gamma^+_{\mathbf{k}\alpha}\gamma_{\mathbf{k}'\alpha'} = -\gamma_{\mathbf{k}'\alpha'}\gamma^+_{\mathbf{k}\alpha}$ (для $\mathbf{k},\ \alpha \neq \mathbf{k}',\ \alpha'$) запишем суммарный вклад от первых двух членов выражения (4.151) в виде

$$M(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha') = B(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha')\,u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} - \\ - v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'}\sum_{\sigma,\,\sigma'}\rho_{\sigma'\alpha'}\rho_{\sigma\alpha}B(-\mathbf{k}'\sigma'\,|\,-\mathbf{k}\sigma). \quad (4.152)$$

Сумма $\sum_{\sigma\sigma'}B(-\mathbf{k}'\sigma'\,|\,-\mathbf{k}\sigma)\rho_{\sigma'\alpha'}\rho_{\sigma\alpha}$ фактически представляет собой матричный элемент $B(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha')$, в котором направления спинов и импульсов изменены на обратные. Для взаимодействия $\mathscr{H}_1$ рассматриваемого вида эти два матричных элемента отличаются самое большее знаком

$$\sum_{\sigma\sigma'}B(-\mathbf{k}'\sigma'\,|\,-\mathbf{k}\sigma)\rho_{\sigma\alpha}\rho_{\sigma'\alpha'} = \eta B(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha'), \quad (4.153)$$

где

$$\eta = \begin{cases} +1 & \text{для случая 1,} \\ -1 & \text{для случая 2.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$M(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha') = B(\mathbf{k}\alpha\,|\,\mathbf{k}'\alpha')(u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} - \eta v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'}). \quad (4.154)$$

Величина $(u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} - \eta v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'})$ носит название фактора когерентности перехода. Отнесенное к единице времени число переходов $(\mathbf{k}'\alpha') \to (\mathbf{k}\alpha)$

[1]) Рассуждение нестрогое, поэтому не всегда верное. Для задач, связанных с поглощением ультразвука, имеющих сейчас экспериментальный смысл, тем не менее можно пренебречь изменением Δ. — *Прим. ред.*

за вычетом обратных переходов равно

$$\dot{\nu} = \frac{2\pi}{\hbar} |M(\mathbf{k}\alpha|\mathbf{k}'\alpha')|^2 \{f(\varepsilon_{\mathbf{k}'})[1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}})] - f(\varepsilon_{\mathbf{k}})[1 - f(\varepsilon_{\mathbf{k}'})]\} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'} - \hbar\omega), \quad (4.155)$$

где мы предположили, что возмущение $\mathscr{H}_1$ зависит от времени синусоидально с частотой ω.

Поглощаемая мощность равна

$$W_1 = \sum_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'} \dot{\nu}\hbar\omega. \quad (4.156)$$

Чтобы вычислить W_1, произведем сначала усреднение квадрата матричного элемента B по всем возможным направлениям волновых векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ и спинов частиц

$$B^2 = \overline{|B(\mathbf{k}\alpha|\mathbf{k}'\alpha')|^2}.$$

Поскольку $|\xi_{\mathbf{k}}|$ и $|\xi_{\mathbf{k}'}|$ малы по сравнению с E_F [это обеспечивается множителями f в (4.155)], величину B^2 можно считать постоянной; тогда

$$W_1 = 2\pi\omega B^2 \int_{\Delta}^{\infty} N_s(\varepsilon) N_s(\varepsilon') (uu' - \eta vv')^2 \times [f(\varepsilon') - f(\varepsilon)] \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega)\, d\varepsilon\, d\varepsilon'. \quad (4.157)$$

Здесь $N_s(\varepsilon) = N(0)\,|d\xi/d\varepsilon|$ — плотность состояний для возбуждений в сверхпроводнике

$$N_s(\varepsilon) = N(0) \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \qquad (\varepsilon > \Delta). \quad (4.158)$$

Используя определения (4.71) и (4.72) для u и v, можно написать

$$(uu' - \eta vv')^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\xi\xi'}{\varepsilon\varepsilon'} - \eta\frac{\Delta^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right]. \quad (4.159)$$

При подстановке (4.159) в (4.157) и при переходе к интегрированию по ξ необходимо иметь в виду, что каждому значению ε соответствуют два значения ξ с противоположными знаками. Поэтому член $\xi\xi'/\varepsilon\varepsilon'$ исчезает при суммировании по этим значениям. В результате получаем

$$W_1 = 4\pi\omega B^2 N^2(0) \int_{\Delta}^{\infty} d\varepsilon \int_{\Delta}^{\infty} d\varepsilon' \frac{\varepsilon\varepsilon' - \eta\Delta^2}{(\varepsilon^2 - \Delta^2)^{1/2}(\varepsilon'^2 - \Delta^2)^{1/2}} \times [f(\varepsilon') - f(\varepsilon)] \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega). \quad (4.160)$$

Аналогичный расчет можно выполнить для нахождения мощности W_2, поглощаемой за счет процессов рождения и аннигиляции

двух квазичастиц. Она отлична от нуля лишь при $\hbar\omega > 2\Delta$. Окончательная формула для суммарной мощности $W_s = W_1 + W_2$ отличается от (4.160) только пределами интегрирования

$$W_s = 2\pi\omega B^2 N^2(0) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, d\varepsilon' \frac{\varepsilon\varepsilon' - \eta\Delta^2}{(\varepsilon^2-\Delta^2)^{1/2}(\varepsilon'^2-\Delta^2)^{1/2}} \times$$
$$\times [f(\varepsilon') - f(\varepsilon)]\,\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega), \quad (4.161)$$

где ε и ε' имеют произвольный знак, но $|\varepsilon| > \Delta$ и $|\varepsilon'| > \Delta$. На опыте мощность W_s всегда сравнивают с мощностью W_n, поглощаемой в нормальном состоянии [ее просто получить из (4.161), положив $\Delta = 0$],

$$\frac{W_s}{W_n} = \frac{1}{\hbar\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, d\varepsilon' \frac{\varepsilon\varepsilon' - \eta\Delta^2}{(\varepsilon^2-\Delta^2)^{1/2}(\varepsilon'^2-\Delta^2)^{1/2}} \times$$
$$\times [f(\varepsilon') - f(\varepsilon)]\,\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega). \quad (4.162)$$

Применения

1. Поглощение звука. В этом случае $\eta = 1$ и фактор когерентности мал, когда ε и ε' одновременно близки к Δ или $-\Delta$. В случае когда $\hbar\omega \ll \Delta$ или $\hbar\omega \ll k_B T_c$, соотношение (4.162) принимает вид

$$\frac{W_s}{W_n} = -\int_{|\varepsilon|>\Delta} d\varepsilon\, \frac{\varepsilon^2-\Delta^2}{\varepsilon^2-\Delta^2}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon} = \frac{2}{1+e^{\beta\Delta}}. \quad (4.163)$$

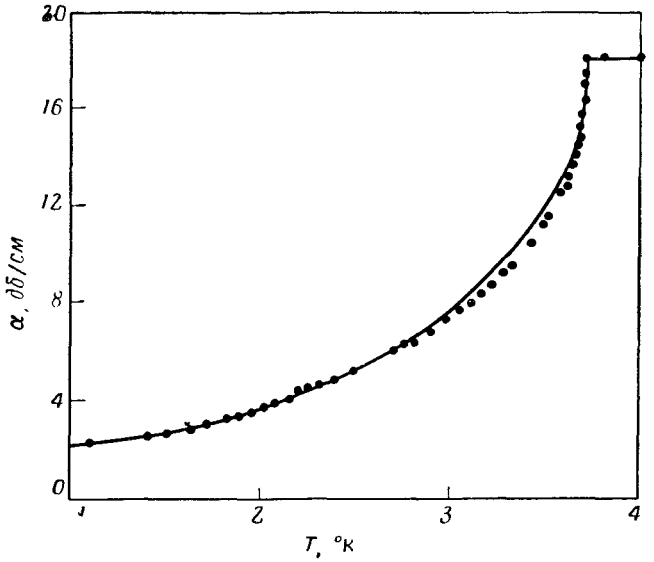
Отсюда видно, что поглощение очень мало при низких температурах и быстро возрастает при $T \to T_c$. Это дает один из способов измерения $\Delta(T)$, который широко используется на практике[1]). На фиг. 44 приведена кривая поглощения ультразвука в олове, полученная Морзом [82].

2. Ядерная релаксация. Взаимодействие $\mathscr{H}_1$ между ядерными спинами и электронами проводимости имеет довольно сложный вид. Можно показать, однако, что оно относится к случаю $\eta = -1$.

На опыте измеряется время T_1, необходимое для установления теплового равновесия ядерных спинов с электронами в нулевом поле. Отношение скоростей релаксации T_{1n}/T_1 в сверхпроводящем и нормальном состояниях по-прежнему дается формулой (4.162), в которой частота ω теперь равна частоте прецессии ядерного спина в локальном поле соседних ядер. Эта частота мала ($\omega \sim 10^4$ *сек*$^{-1}$), поэтому мы можем устремить ω к нулю. Таким образом,

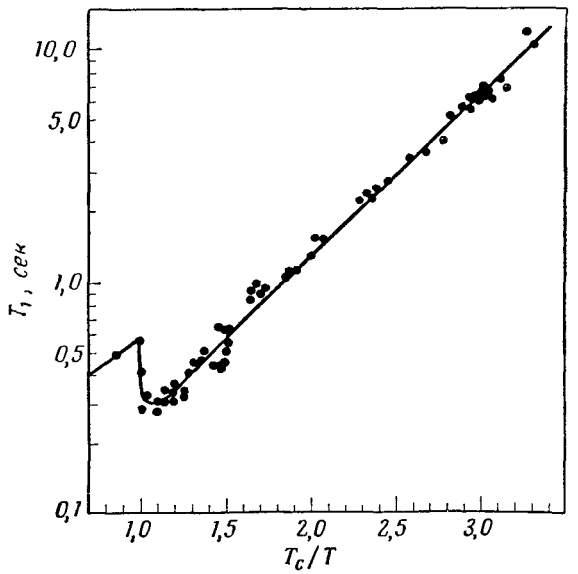
$$\frac{T_{1n}}{T_1} = -\int_{|\varepsilon|>\Delta} d\varepsilon\, \frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\frac{\varepsilon^2+\Delta^2}{\varepsilon^2-\Delta^2}. \quad (4.164)$$

[1]) Подробнее см. обзор Дугласа [9]. — *Прим. ред.*



Фиг. 44. Результаты измерения коэффициента поглощения ультразвука в олове (Морз и др. [82]).

Для сравнения приведена кривая, полученная на основе теории БКШ.



Фиг. 45. Зависимость времени ядерной релаксации T_1 в алюминии от температуры (Масуда и Редфилд [84]).

При температурах, немного меньших критической, наблюдается резкое уменьшение времени T_1. Сплошная кривая вычислена на основе теории БКШ в предположении, что пик плотности состояний размазан в энергетическом интервале шириной $\sim \Delta/5$.

В данном случае фактор когерентности не обращается в нуль при $|\varepsilon| = \Delta$ одновременно со знаменателем. В результате интеграл логарифмически расходится. Однако в реальных металлах параметр $\Delta_{\mathbf{k}}$ анизотропен. Учет этого обстоятельства приводит к „размазыванию" плотности состояний $N_s(\varepsilon)$ вблизи особенности, так что интеграл становится сходящимся. Результат зависит от конкретного вида $\Delta_{\mathbf{k}}$.

Фактически параметр $\Delta_{\mathbf{k}}$ проявляет довольно слабую анизотропию; изменение T_1 с температурой для этого случая показано на фиг. 45. Для температур T, весьма близких к T_c, скорость релаксации в сверхпроводящем состоянии оказывается *больше, чем в нормальном состоянии*. Этот характерный результат связан с возрастанием плотности состояний $N_s(\varepsilon)$ ниже T_c. При низких температурах $T \ll T_c$, напротив, релаксация становится очень медленной из-за фактора „населенности" $df/d\varepsilon$. Такой тип зависимости $1/T_1$ от T впервые наблюдался Гебелем и Слихтером [83] в 1957 г. Предсказание того, что факторы когерентности и соответственно характер ультразвукового поглощения и ядерной релаксации могут быть совершенно различными, явилось одним из больших успехов теории БКШ.

ЛИТЕРАТУРА

Tinkham M., Superconductivity, New York, 1965.
Lynton E. A., Superconductivity, 2d ed., London, 1965, ch. 8—11. (Имеется перевод 1-го издания: Э. Линтон, Сверхпроводимость, изд-во „Мир" 1964.)

Глава V

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

§ 1. УРАВНЕНИЯ БОГОЛЮБОВА

В гл. IV мы изучали однородный электронный газ при наличии притяжения между частицами. Рассмотрим теперь более общую задачу, когда электроны, помимо этого, испытывают также воздействие со стороны произвольного внешнего поля с потенциалом $U_0(\mathbf{r})$ (что важно для описания влияния примесей и поверхности образца) и магнитного поля $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.

На первый взгляд, наиболее естественный метод учета потенциала $U_0(\mathbf{r})$ состоит в следующем:

1. Найдем одноэлектронные волновые функции w_n, являющиеся решениями уравнения

$$\xi_n w_n = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U_0(\mathbf{r}) - E_F\right) w_n. \tag{5.1}$$

2. Заметим, что каждому значению энергии ξ_n отвечают по крайней мере два решения

$$w_n = w_n(\mathbf{r})\,|\uparrow\rangle \quad \text{и} \quad w_{\bar{n}} = w_n^*(\mathbf{r})\,|\downarrow\rangle, \tag{5.2}$$

где символ $|\alpha\rangle$ обозначает спиновое состояние.

3. Построим по методу БКШ пробную волновую функцию, описывающую спаривание электронов в вырожденных по энергии состояниях w_n и $w_{\bar{n}}$,

$$\tilde{\varphi} = \prod_n \left(u_n + v_n a_n^+ a_{\bar{n}}^+\right)\varphi_0, \tag{5.3}$$

где $a_{\bar{n}}^+$ — оператор рождения электрона в состоянии $w_{\bar{n}}$. Последующий анализ проводится так же, как и в гл. IV, § 3.

Однако такой подход обладает рядом недостатков: а) он неприменим при наличии магнитного поля, б) свобода в выборе пробной функции сильно ограничена. На самом деле энергия системы часто может быть меньше, если спаривание электронов производится в состояниях, более удачно выбранных, чем w_n.

Перейдем теперь к описанию более мощного метода, развитого Боголюбовым [85] в 1959 г. По существу он является обобщением метода Хартри — Фока на случай сверхпроводимости. Сначала перейдем в гамильтониане $\mathscr{H}$ системы электронов от операторов $a_{\mathbf{k}\alpha}$ (удобных только в случае $U_0 = 0$) к их пространственным фурье-компо-

нентам

$$\Psi(\mathbf{r}\alpha) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}\alpha},$$
$$\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha) = \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a^{+}_{\mathbf{k}\alpha}. \tag{5.4}$$

Для простоты мы считаем объем системы равным единице; α — спиновый индекс, принимающий значения $\uparrow$ и $\downarrow$. Операторы Ψ подчиняются следующим правилам антикоммутации:

$$\Psi(\mathbf{r}\alpha)\Psi(\mathbf{r}'\beta) + \Psi(\mathbf{r}'\beta)\Psi(\mathbf{r}\alpha) = 0,$$
$$\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha)\Psi^{+}(\mathbf{r}'\beta) + \Psi^{+}(\mathbf{r}'\beta)\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha) = 0, \tag{5.5}$$
$$\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha)\Psi(\mathbf{r}'\beta) + \Psi(\mathbf{r}'\beta)\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha) = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Оператор числа частиц имеет вид

$$N = \sum_{\mathbf{k}\alpha} a^{+}_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha} = \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r}\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha)\Psi(\mathbf{r}\alpha). \tag{5.6}$$

Гамильтониан $\mathscr{H}$ тоже весьма просто записать через Ψ и Ψ^{+} (см. книгу Ландау и Лифшица [72], гл. 9)

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1, \tag{5.7}$$

$$\mathscr{H}_0 = \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r}\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha)\left[\frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} + U_0(\mathbf{r})\right]\Psi(\mathbf{r}\alpha), \tag{5.8}$$

$$\mathscr{H}_1 = -\frac{1}{2} V \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{r}\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha)\Psi^{+}(\mathbf{r}\beta)\Psi(\mathbf{r}\beta)\Psi(\mathbf{r}\alpha). \tag{5.9}$$

Потенциал $U_0(\mathbf{r})$ мы считаем здесь *не зависящим от спина.* (В дальнейшем при описании обменного взаимодействия электронов в магнитной среде нам понадобится ввести член, явно зависящий от спина.) Мы также использовали простейшую форму электрон-электронного взаимодействия $\mathscr{H}_1$, а именно предположили, что а) взаимодействие не зависит от спина (это справедливо для немагнитных материалов), б) взаимодействие имеет точечный характер и, следовательно, описывается всего лишь одним коэффициентом V (приближение БКШ).

Отметим также, что при написании $\mathscr{H}_0$ мы пренебрегли взаимодействием спина электрона проводимости с магнитным полем (это законно, если $e\hbar H/mc \ll \Delta$).

Как и прежде, при рассмотрении оказывается удобным пользоваться вместо гамильтониана $\mathscr{H}_0$ оператором

$$\mathscr{H}_0 - E_F N = \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r}\Psi^{+}(\mathbf{r}\alpha)\mathscr{H}_e\Psi(\mathbf{r}\alpha), \tag{5.10}$$

$$\mathscr{H}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U_0(\mathbf{r}) - E_F. \tag{5.11}$$

Определение эффективных потенциалов

Заменим теперь взаимодействие $V\Psi^+\Psi^+\Psi\Psi$ средним потенциалом, содержащим только два оператора Ψ^+ или Ψ. Будем исходить из следующего эффективного гамильтониана:

$$\mathscr{H}_{\text{эфф}} = \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha} \Psi^+(\mathbf{r}\alpha)\mathscr{H}_e(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}\alpha) + U(\mathbf{r})\Psi^+(\mathbf{r}\alpha)\Psi(\mathbf{r}\alpha) + \right.$$
$$\left. + \Delta(\mathbf{r})\Psi^+(\mathbf{r}\uparrow)\Psi^+(\mathbf{r}\downarrow) + \Delta^*(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}\downarrow)\Psi(\mathbf{r}\uparrow) \right]. \quad (5.12)$$

Член, содержащий U, уничтожает и рождает один электрон, оставляя, таким образом, полное число частиц неизменным. С другой стороны, члены с Δ увеличивают или уменьшают число частиц на два. Это не должно вызывать беспокойства, поскольку оператор $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$ действует на волновые функции (такие, как $\tilde{\varphi}$), не являющиеся собственными функциями оператора числа частиц. В гл. IV рассматривался простой случай, когда средние типа $\langle\tilde{\varphi}|a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}^+|\tilde{\varphi}\rangle$ не обращались в нуль. Здесь по тем же причинам произведение типа $\Psi^+\Psi^+$ отлично от нуля; этот член в дальнейшем будет играть важную роль. Мы назовем $\Delta(\mathbf{r})$ *потенциалом спаривания*. [Заметим, что члены типа $\Psi(\mathbf{r}\uparrow)\Psi(\mathbf{r}\uparrow)$ обращаются в нуль тождественно в силу коммутационных соотношений (5.5).]

Уровни энергии эффективного гамильтониана

Предположим на время, что гамильтониан $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$ нам известен и попытаемся определить его собственные функции и соответствующие значения энергии. Оператор $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$ квадратичен по Ψ и Ψ^+, поэтому его можно привести к диагональному виду с помощью унитарного преобразования, которое по аналогии с (4.100) мы запишем в следующем виде:

$$\Psi(\mathbf{r}\uparrow) = \sum_n \left[\gamma_{n\uparrow} u_n(\mathbf{r}) - \gamma_{n\downarrow}^+ v_n^*(\mathbf{r})\right],$$
$$\Psi(\mathbf{r}\downarrow) = \sum_n \left[\gamma_{n\downarrow} u_n(\mathbf{r}) + \gamma_{n\uparrow}^+ v_n^*(\mathbf{r})\right], \quad (5.13)$$

где $\gamma_{n\alpha}$ и $\gamma_{n\alpha}^+$ — система новых операторов, подчиняющихся по-прежнему фермиевским коммутационным соотношениям

$$\gamma_{n\alpha}^+\gamma_{m\beta} + \gamma_{m\beta}\gamma_{n\alpha}^+ = \delta_{mn}\delta_{\alpha\beta},$$
$$\gamma_{n\alpha}\gamma_{m\beta} + \gamma_{m\beta}\gamma_{n\alpha} = 0. \quad (5.14)$$

Преобразование (5.13) должно приводить $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$ к диагональному виду, т. е.

$$\mathscr{H}_{\text{эфф}} = E_g + \sum_{n,\alpha} \varepsilon_n \gamma^+_{n\alpha} \gamma_{n\alpha}, \tag{5.15}$$

где E_g — энергия основного состояния, а ε_n — энергия возбуждения с квантовым числом n. Это условие можно записать иначе, вычислив коммутаторы $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$ с $\gamma_{n\alpha}$ и $\gamma^+_{n\alpha}$

$$\begin{aligned} [\mathscr{H}_{\text{эфф}}, \gamma_{n\alpha}] &= -\varepsilon_n \gamma_{n\alpha}, \\ [\mathscr{H}_{\text{эфф}}, \gamma^+_{n\alpha}] &= \varepsilon_n \gamma^+_{n\alpha}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Условия (5.16) определяют выбор функций u_n и v_n, фигурирующих в преобразовании (5.13). Чтобы найти уравнения для u и v, вычислим коммутатор $[\mathscr{H}_{\text{эфф}}, \Psi]$. Используя определение (5.12) для $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$ и антикоммутационные свойства операторов Ψ и Ψ^+, получаем

$$\begin{aligned} [\Psi(\mathbf{r}\uparrow), \mathscr{H}_{\text{эфф}}] &= [\mathscr{H}_e + U(\mathbf{r})]\,\Psi(\mathbf{r}\uparrow) + \Delta(\mathbf{r})\,\Psi^+(\mathbf{r}\downarrow), \\ [\Psi(\mathbf{r}\downarrow), \mathscr{H}_{\text{эфф}}] &= [\mathscr{H}_e + U(\mathbf{r})]\,\Psi(\mathbf{r}\downarrow) - \Delta(\mathbf{r})\,\Psi^+(\mathbf{r}\uparrow). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Выразим теперь в этих уравнениях Ψ и Ψ^+ через γ и γ^+ с помощью (5.13) и используем найденные значения коммутаторов (5.16). Сравнивая затем коэффициенты при γ_n (и γ^+_n) с обеих сторон получающихся равенств, приходим к *уравнениям Боголюбова*

$$\begin{aligned} \varepsilon u(\mathbf{r}) &= [\mathscr{H}_e + U(\mathbf{r})]\,u(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r})\,v(\mathbf{r}), \\ \varepsilon v(\mathbf{r}) &= -[\mathscr{H}^*_e + U(\mathbf{r})]\,v(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r})\,u(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Матрицы $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ являются собственными функциями линейной системы уравнений (5.18) с собственными значениями ε_n

$$\varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hat{\Omega} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЯ

1. В присутствии магнитного поля оператор $\mathscr{H}^*_e$ отличен от оператора $\mathscr{H}_e$

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_e &= \frac{1}{2m}\left(-ih\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U_0(\mathbf{r}) - E_F, \\ \mathscr{H}^*_e &= \frac{1}{2m}\left(ih\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U_0(\mathbf{r}) - E_F \neq \mathscr{H}_e. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Оба оператора $\mathscr{H}_e$ и $\mathscr{H}^*_e$ эрмитовы.

2. Оператор $\hat{\Omega}$ эрмитов, следовательно, различные собственные функции $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ ортогональны между собой.

3. Если $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ — решение, соответствующее собственному значению ε, то $\begin{pmatrix} v^* \\ u^* \end{pmatrix}$ — решение, соответствующее $-\varepsilon$[1]). В согласии с (5.15) мы удерживаем только решения, отвечающие положительным значениям ε.

Выбор потенциалов U и Δ

Определим теперь оператор $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$, исходя из условия минимальности плотности свободной энергии F, вычисленной на основе состояний, диагонализующих $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$. По определению,

$$F = \langle \mathscr{H} \rangle - TS, \tag{5.20}$$

где $\mathscr{H}$ — исходный гамильтониан $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1$, среднее от которого описывается выражением

$$\langle \mathscr{H} \rangle = \frac{\sum_{\varphi} \langle \varphi | \mathscr{H} | \varphi \rangle e^{-\beta E_\varphi}}{\sum_{\varphi} e^{-\beta E_\varphi}}. \tag{5.21}$$

Матричные элементы берутся по собственным функциям $|\varphi\rangle$ гамильтониана $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$

$$\mathscr{H}_{\text{эфф}} |\varphi\rangle = E_\varphi |\varphi\rangle. \tag{5.22}$$

Дальнейший расчет $\langle \mathscr{H} \rangle$ заключается в замене Ψ в (5.7) — (5.9) на γ в соответствии с (5.13) и последующем использовании правил вычисления средних значений:

$$\begin{aligned} \langle \gamma^+_{n\alpha} \gamma_{m\beta} \rangle &= \delta_{nm} \delta_{\alpha\beta} f_n, \\ \langle \gamma_{n\alpha} \gamma_{m\beta} \rangle &= 0, \\ f_n &= \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_n} + 1}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Нет необходимости, однако, производить этот расчет полностью. Запишем $\langle \mathscr{H} \rangle$ в виде

$$\langle \mathscr{H} \rangle = \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} \langle \Psi^+ (\mathbf{r}\alpha) \mathscr{H}_e \Psi (\mathbf{r}\alpha) \rangle - \\ - \frac{V}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{r} \langle \Psi^+ (\mathbf{r}\alpha) \Psi^+ (\mathbf{r}\beta) \Psi (\mathbf{r}\beta) \Psi (\mathbf{r}\alpha) \rangle. \tag{5.24}$$

[1]) Последние два свойства доказывают унитарность преобразования (5.13).

Произведение $\langle \Psi^+ \Psi^+ \Psi\Psi \rangle$ можно упростить, обращаясь к теореме Вика, в формулировке которой используется лишь тот факт, что операторы Ψ^+ и Ψ являются линейными комбинациями операторов γ^+ и γ. Согласно этой теореме,

$$\begin{aligned}\langle \Psi^+(1)\Psi^+(2)\Psi(3)\Psi(4)\rangle = &\langle \Psi^+(1)\Psi(4)\rangle\langle \Psi^+(2)\Psi(3)\rangle - \\ &- \langle \Psi^+(1)\Psi(3)\rangle\langle \Psi^+(2)\Psi(4)\rangle + \\ &+ \langle \Psi^+(1)\Psi^+(2)\rangle\langle \Psi(3)\Psi(4)\rangle. \quad (5.25)\end{aligned}$$

Дадим теперь амплитуде $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ и числам заполнения f_n приращения $\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$ и δf_n. Тогда свободная энергия F, согласно (5.20), получит приращение

$$\begin{aligned}\delta F = \int d\mathbf{r} \Big\{ &\sum_{\alpha} \delta \langle \Psi^+(\mathbf{r}\alpha)\mathscr{H}_e \Psi(\mathbf{r}\alpha)\rangle - \\ &- V \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi^+(\mathbf{r}\alpha)\Psi(\mathbf{r}\alpha)\rangle \delta\langle \Psi^+(\mathbf{r}\beta)\Psi(\mathbf{r}\beta)\rangle + \\ &+ V \sum_{\alpha} \langle \Psi^+(\mathbf{r}\alpha)\Psi(\mathbf{r}\alpha)\rangle \delta\langle \Psi^+(\mathbf{r}\alpha)\Psi(\mathbf{r}\alpha)\rangle - \\ &- V \left[\langle \Psi^+(\mathbf{r}\uparrow)\Psi^+(\mathbf{r}\downarrow)\rangle \delta\langle \Psi(\mathbf{r}\downarrow)\Psi(\mathbf{r}\uparrow)\rangle + \text{Компл. сопр.}\right]\Big\} - T\delta S. \\ &(5.26)\end{aligned}$$

Имея в виду „немагнитный случай", мы положили $\langle \Psi^+(\mathbf{r}\uparrow)\Psi(\mathbf{r}\downarrow)\rangle = 0$. Величина

$$F_1 = \langle \mathscr{H}_{\text{эфф}} \rangle - TS \quad (5.27)$$

стационарна по отношению к вариациям δu_n, δv_n и δf_n, поскольку оператор $\mathscr{H}_{\text{эфф}}$ диагонален относительно состояний, описываемых в терминах возбуждений. С помощью (5.12) запишем это условие в следующем явном виде:

$$\begin{aligned}0 = \delta\langle \mathscr{H}_{\text{эфф}}\rangle - T\delta S = \\ = \int d\mathbf{r} \Big\{ &\sum_{\alpha} \delta \langle \Psi^+(\mathbf{r}\alpha)[\mathscr{H}_e + U(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}\alpha)\rangle + \\ &+ [\Delta(\mathbf{r})\delta\langle \Psi^+(\mathbf{r}\uparrow)\Psi^+(\mathbf{r}\downarrow)\rangle + \text{Компл. сопр.}]\Big\} - T\delta S. \quad (5.28)\end{aligned}$$

Из сравнения выражений (5.26) и (5.28) видно, что свободная энергия F минимальна, если в качестве эффективных потенциалов

взять

$$U(\mathbf{r}) = -V\langle\Psi^{+}(\mathbf{r}\uparrow)\Psi(\mathbf{r}\uparrow)\rangle = -V\langle\Psi^{+}(\mathbf{r}\downarrow)\Psi(\mathbf{r}\downarrow)\rangle \quad (5.29)$$

(обычный результат Хартри — Фока для точечного взаимодействия) и

$$\Delta(\mathbf{r}) = -V\langle\Psi(\mathbf{r}\downarrow)\Psi(\mathbf{r}\uparrow)\rangle = V\langle\Psi(\mathbf{r}\uparrow)\Psi(\mathbf{r}\downarrow)\rangle. \quad (5.30)$$

Заменяя Ψ и Ψ^{+} через γ и γ^{+} с помощью (5.13) и используя правила вычисления средних значений (5.23), полученные результаты можно представить в явной форме

$$U(\mathbf{r}) = -V\sum_{n}[|u_n(\mathbf{r})|^2 f_n + |v_n(\mathbf{r})|^2(1-f_n)], \quad (5.31)$$

$$\Delta(\mathbf{r}) = +V\sum_{n}u_n(\mathbf{r})v_n^{*}(\mathbf{r})(1-2f_n). \quad (5.32)$$

Эти условия обеспечивают самосогласованность потенциалов U и Δ.

Фактически между $U(\mathbf{r})$ и $\Delta(\mathbf{r})$ имеется важное различие, которое состоит в следующем. Потенциал Хартри — Фока $U(\mathbf{r})$ получается в результате суммирования по всем состояниям ниже уровня Ферми. Следовательно, он почти не зависит от температуры и приближенно его можно считать равным потенциалу Хартри — Фока *нормального состояния*. Это значительно упрощает его расчет. Наоборот, потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ определяется суммой членов типа $u_n v_n^{*}$. Такие члены, как мы уже видели в случае однородного газа, отличны от нуля лишь вблизи поверхности Ферми, поэтому потенциал $\Delta(\mathbf{r})$ сильно зависит от температуры.

В случае однородного газа потенциал $\Delta(\mathbf{r})$ не зависел от координат, а уравнение самосогласованности (5.31) сводилось к определению постоянной Δ. В общем случае изменяющегося в пространстве потенциала $\Delta(\mathbf{r})$ условию самосогласованности удовлетворить значительно труднее. К этому вопросу мы еще неоднократно вернемся в дальнейшем.

Задача. Рассмотреть спектр квазичастиц в чистом сверхпроводнике, в котором течет однородный ток. Токовое состояние описывается потенциалом спаривания вида

$$\Delta = |\Delta| e^{2i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{q}$ — вектор в направлении тока (средний импульс на электрон в этом состоянии равен $\hbar\mathbf{q}$).

Решение. Решение системы (5.18) ищем в виде

$$u(\mathbf{r}) = U_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}},$$

$$v(\mathbf{r}) = V_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}},$$

что приводит к следующей системе уравнений для собственных значений:

$$(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})U_{\mathbf{k}} - \Delta V_{\mathbf{k}} = 0,$$

$$-\Delta U_{\mathbf{k}} + (\varepsilon_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})V_{\mathbf{k}} = 0.$$

Положительные собственные значения $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ определяются выражением

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{2} + \left[\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{2}\right)^2 + |\Delta|^2\right]^{1/2}.$$

Как мы увидим далее, основной интерес представляют значения $q \sim \Delta/\hbar v_F \ll k_F$. В приближении, линейном по q, имеем

$$\frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{2} \approx \frac{\hbar}{m}\mathbf{k}\cdot\mathbf{q},$$

$$\frac{\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{2} \approx \xi_{\mathbf{k}},$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} \approx \varepsilon^0_{\mathbf{k}} + \frac{\hbar}{m}\mathbf{k}\cdot\mathbf{q},$$

где $\varepsilon^0_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi^2_{\mathbf{k}} + |\Delta|^2}$ — спектр возбуждений в отсутствие тока ($\mathbf{q} = 0$), а величину $\hbar\mathbf{q}/m = \mathbf{v}_s$ обычно называют сверхтекучей скоростью. Отметим, что щель в энергетическом спектре обращается в нуль при $v_s = |\Delta|/\hbar k_F = |\Delta|/p_F$. (При применении написанных формул необходимо иметь в виду, что самосогласованное значение $|\Delta|$, вообще говоря, зависит от v_s.)

Принципиально этот спектр можно было бы изучать на тонких пленках чистых металлов. Практически это невозможно по следующим причинам. Ток в пленке будет однородным в том случае, если ее толщина d меньше глубины проникновения λ. Однако толщина d должна оставаться большой по сравнению с ξ_0, иначе диффузное рассеяние на границах пленки приведет к существенным изменениям в спектре системы. Таким образом, пленка должна быть изготовлена из чистого сверхпроводника второго рода ($\lambda \gg \xi_0$). Но в этом случае появляется другая трудность: при $v_s \sim |\Delta|/p_F$ плотность тока $en_s v_s$ велика, а поле на поверхности пленки, составляющее по порядку величины

$$\frac{en_s v_s d}{c} \sim \frac{\Phi_0 d}{\lambda^2 \xi_0} \qquad (T = 0),$$

становится больше значения нижнего поля H_{c1} на фактор $\sim d/\xi_0 > 1$. В итоге в пленке начнут образовываться вихревые нити и ситуация не будет иметь ничего общего с рассматриваемой.

Тем не менее приведенный расчет можно использовать для обсуждения спектра квазичастиц в шубниковской фазе массивных (чистых) сверхпроводников второго рода (Сиро [86]). Предположим, что а) параметр Гинзбурга — Ландау $\varkappa = \lambda/\xi_0$ значительно больше единицы, б) поле H значительно меньше верхнего поля H_{c2}. Тогда расстояние d между вихревыми нитями превышает ξ_0 и большинство возбуждений имеет энергию $\varepsilon \sim \Delta_\infty$, где Δ_∞ — амплитуда потенциала спаривания вдали от нитей. Для определения величины ε вычислим сверхтекучую скорость $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$ и предположим, что спектр возбуждений в этой точке „смещен" относительно спектра в отсутствие нитей:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \left(\Delta^2_\infty + \xi^2_{\mathbf{k}}\right)^{1/2} + \hbar\mathbf{v}_s\cdot\mathbf{k},$$

где

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2\left(k^2 - k_F^2\right)}{2m}.$$

Минимальный размер волнового пакета, построенного из таких возбуждений, имеет порядок ξ_0, в то время как поле и скорость $\mathbf{v}_s$ изменяются на расстояниях $\sim\lambda > \xi_0$, поэтому в большинстве случаев такой подход является

законным. Однако он становится неприменим при нахождении низколежащих возбужденных состояний ($\varepsilon \ll \Delta_0$), локализованных в непосредственной близости от нити, где скорость $\mathbf{v}_s$ и параметр порядка Δ изменяются очень быстро. Этот особый тип возбуждений мы обсудим в задаче на стр. 154.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОТЕНЦИАЛЕ СПАРИВАНИЯ И СПЕКТРЕ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Градиентная инвариантность

Одноэлектронный гамильтониан

$$\mathscr{H}_e(\mathbf{A}) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U - E_F$$

и соответствующее ему комплексно сопряженное выражение

$$\mathscr{H}_e^*(\mathbf{A}) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U - E_F$$

зависят от выбора вектора-потенциала $\mathbf{A}$. Выбор $\mathbf{A}$ не однозначен; при замене $\mathbf{A}$ на

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}), \tag{5.33}$$

где $\chi(\mathbf{r})$ — произвольная функция, имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}' = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{h},$$

т. е. $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ равным образом пригодны для описания конфигурации поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$. При этом все физические величины не должны зависеть от выбора вектора-потенциала $\mathbf{A}$ или $\mathbf{A}'$. Это свойство мы докажем на примере энергии квазичастичных возбуждений [т. е. для собственных значений уравнения (5.18)].

Предположим, что мы знаем собственные функции $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ уравнения (5.18) с вектором-потенциалом $\mathbf{A}$. Рассмотрим теперь уравнение (5.18) с вектором-потенциалом $\mathbf{A}'$. При этом происходят изменения двоякого рода.

а) Собственные функции $\begin{pmatrix} u_n' \\ v_n' \end{pmatrix}$ отличаются от $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} u_n'(\mathbf{r}) &= u_n(\mathbf{r})\, e^{ie\chi(\mathbf{r})/\hbar c}, \\ v_n'(\mathbf{r}) &= v_n(\mathbf{r})\, e^{-ie\chi(\mathbf{r})/\hbar c}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

б) Потенциал спаривания также изменяется; если вектору-потенциалу $\mathbf{A}$ соответствует значение $\Delta(\mathbf{r})$, то

$$\Delta'(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})\, e^{2ie\chi(\mathbf{r})/\hbar c}. \tag{5.35}$$

Доказательство. Для функции u'_n, определяемой соотношением (5.34), можно написать

$$\left(\mathrm{p}-\frac{e}{c}\mathrm{A}'\right)u'_n(\mathbf{r})=\left(-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}\mathrm{A}'\right)e^{ie\chi(\mathbf{r})/\hbar c}u_n(\mathbf{r})=$$

$$=e^{ie\chi/\hbar c}\left(-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}\mathrm{A}'+\frac{e}{c}\nabla\chi\right)u_n(\mathbf{r})=e^{ie\chi/\hbar c}\left(\mathrm{p}-\frac{e}{c}\mathrm{A}\right)u_n. \qquad (5.36)$$

[Здесь мы использовали преобразование (5.35).] Повторим эту операцию

$$\left(\mathrm{p}-\frac{e}{c}\mathrm{A}'\right)^2u'_n=e^{ie\chi/\hbar c}\left(\mathrm{p}-\frac{e}{c}\mathrm{A}\right)^2u_n,$$

$$\mathscr{H}_e(\mathrm{A}')\,u'_n=\mathscr{H}_e(\mathrm{A})\,u_n. \qquad (5.37а)$$

Аналогично

$$\mathscr{H}^*_e(\mathrm{A}')\,v'_n=\mathscr{H}^*_e(\mathrm{A})\,v_n \qquad (5.37б)$$

Поскольку $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$ есть собственная функция системы (5.18), мы имеем

$$\mathscr{H}_e(\mathrm{A})\,u_n+\Delta v_n=\varepsilon_n u_n.$$

Умножим это уравнение на $\exp(ie\chi/\hbar c)$ и воспользуемся равенством (5.37а). В результате получим

$$\mathscr{H}_e(\mathrm{A}')u'_n+\Delta' v'_n=\varepsilon_n u'_n \qquad (5.38а)$$

и аналогично

$$-\mathscr{H}^*_e(\mathrm{A}')\,v'_n+\Delta' u'_n=\varepsilon_n v'_n. \qquad (5.38б)$$

Таким образом, $\begin{pmatrix}u'_n\\v'_n\end{pmatrix}$ — система собственных функций, соответствующая вектору-потенциалу A' и потенциалу спаривания Δ'. Более того, если потенциал Δ удовлетворяет условию самосогласованности (5.32) при соответствующем выборе функций u и v, то штрихованные величины u', v' и Δ' также удовлетворяют этому условию.

ВЫВОД

Мы приходим, таким образом, к заключению, что волновые функции, а также потенциал спаривания изменяются при градиентном преобразовании $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$. Можно сказать, что потенциал Δ, например, является градиентно ковариантной величиной. Что касается собственных значений ε_n, то они не меняются при этом градиентном преобразовании, т. е. градиентно инвариантны. Тем же способом можно показать, что все физически измеримые величины (скажем, плотность тока в данной точке) являются градиентно инвариантными.

ЗАМЕЧАНИЕ

Ограничения, налагаемые на функцию χ. Потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ должен быть однозначной функцией $\mathbf{r}$ при любом выборе калибровки. Рассмотрим, например, образец в форме полого цилиндра, ось которого совпадает с осью z. Угол поворота вокруг оси z обозначим через φ. Возьмем функцию преобразования в виде

$$\chi=\frac{hc}{2e}\,m\varphi, \qquad (5.39)$$

где m — произвольная постоянная. Тогда

$$\Delta'(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})\, e^{im\varphi}. \tag{5.40}$$

Обе функции Δ и Δ' должны быть однозначными. Отсюда следует, что m — целое число. В общем случае для кольца произвольной формы приращение χ при совершении полного обхода вокруг отверстия равно $2\pi m\,(ch/2e) = mch/2e$ (m — по-прежнему целое число).

Специальные выборы калибровки

Должным выбором функции преобразования χ иногда удается перейти от $\mathbf{A}$ к вектору-потенциалу $\mathbf{A}'$, обладающему рядом преимуществ по сравнению с исходным. Здесь мы остановимся на двух примерах.

Пример 1. Для односвязного образца положим

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0 \tag{5.41а}$$

внутри образца и

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{5.41б}$$

на его поверхности ($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности). Функция преобразования χ внутри образца удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \chi = -\operatorname{div} \mathbf{A} \tag{5.42а}$$

со следующим граничным условием на поверхности:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \chi = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}. \tag{5.42б}$$

Из общих теорем электростатики следует, что решение χ уравнения (5.42а) при условии (5.42б) для односвязного образца единственно. Поэтому вектор-потенциал $\mathbf{A}'$ также определен однозначно. Условия (5.41а) и (5.41б) задают так называемую *лондоновскую* калибровку вектора-потенциала $\mathbf{A}'$.

Пример 2. Для данного вектора-потенциала $\mathbf{A}$ потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ также определен. Выделим амплитуду и фазу Δ

$$\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta(\mathbf{r})|\, e^{i\varphi_{\mathbf{r}}}. \tag{5.43}$$

Совершим теперь градиентное преобразование $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ с помощью функции

$$\chi = -\frac{\hbar c}{2e}\varphi. \tag{5.44}$$

Поскольку Δ — однозначная функция, такой выбор χ всегда допустим [1]). Новый потенциал спаривания равен просто

$$\Delta'(\mathbf{r}) = |\Delta(\mathbf{r})|.$$

Таким образом, надлежащим выбором калибровки всегда можно сделать потенциал спаривания вещественным. Для односвязного сверхпроводника в отсутствие внешних токов эта калибровка фактически совпадает с лондоновской, но она применима и в более общих случаях.

Квантование потока

Рассмотрим сверхпроводящее кольцо, изображенное на фиг. 46 (диаметр и толщина кольца предполагаются большими по сравнению

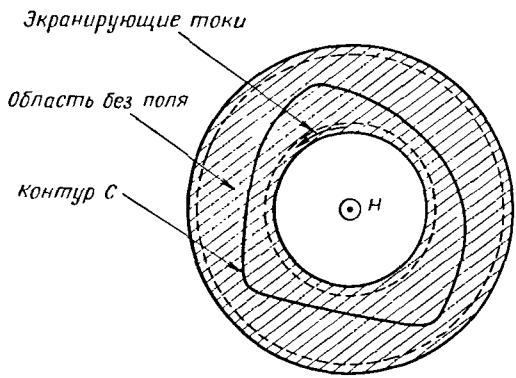
[1]) На это свойство внимание автора обратил д-р П. Маркус.

с глубиной проникновения). Эксперименты Долла и Небауэра [87], а также Дивера и Фербанкса [88] показали, что поток ϕ, проходящий через кольцо, может принимать только определенные дискретные значения

$$\phi = n\phi_0, \qquad \phi_0 = \frac{ch}{2e} \approx 2 \cdot 10^{-7}\ гс \cdot см^2, \tag{5.45}$$

где n — произвольное целое число.

(Измерения столь малых потоков производились на металлических пленках, осажденных на поверхность капилляров (диаметром ~ 10 *мк*). Квант потока ϕ_0 в этом случае соответствует вполне разумному значению поля $\sim 0{,}1$ *гс*.)



Фиг. 46. Сверхпроводящее кольцо с замороженным магнитным моментом.

Толщина кольца предполагается большой по сравнению с глубиной проникновения поля, так что всегда можно выбрать целиком лежащий внутри сверхпроводника контур C, во всех точках которого поле и ток равны нулю.

В теоретическом плане „квантование потока" следует из условия однозначности функции $\Delta(\mathbf{r})$.

Доказательство. Введем вектор

$$\mathbf{u} = \hbar\nabla\varphi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}, \tag{5.46}$$

где φ — определенная выше фаза потенциала спаривания Δ. Отметим сразу, что величина $\mathbf{u}$ является градиентно инвариантной, в чем легко убедиться с помощью законов преобразований (5.34) и (5.35). В физических ситуациях, в которых величина $|\Delta|$ постоянна в пространстве, вектор $\mathbf{u}$ пропорционален локальному значению плотности сверхпроводящего тока (примером может служить случай, рассмотренный в задаче на стр. 146, когда $\mathbf{A} = 0$, а плотность тока постоянна во всем образце). В произвольной точке, находящейся в глубине кольца, поле, а следовательно, и ток отсутствуют; таким образом, $\mathbf{u} = 0$. Проинтегрируем теперь обе части соотношения (5.46) по контуру C,

который нигде не подходит близко к поверхности образца, как показано на фиг. 46. Тогда

$$\oint_C \left(\hbar\nabla\varphi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot d\mathbf{l} = 0, \tag{5.47}$$

поскольку $\mathbf{u} = 0$ вдоль контура C. Интеграл

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \phi$$

равен потоку, заключенному в кольце. Второй интеграл

$$\oint_C \nabla\varphi\cdot d\mathbf{l} = [\varphi]$$

представляет собой изменение фазы φ потенциала $\Delta(\mathbf{r})$ при полном обходе контура C; из требования однозначности $\Delta(\mathbf{r})$ следует, что $[\varphi] = 2\pi n$ (n — целое число). Подставляя полученные результаты в (5.47), приходим к соотношению (5.45).

Впервые явление квантования потока рассмотрел Ф. Лондон, который получил для кванта потока величину ch/e, вдвое превышающую экспериментальное значение. Здесь мы повторим ход рассуждений Ф. Лондона (для чистого металла при $T = 0$), а затем постараемся внести нужные исправления.

Обозначим через $\Phi_0(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ волновую функцию электронов в основном состоянии сверхпроводника (в отсутствие тока). Состояние с однородным током получается путем замены Φ_0 функцией

$$\Phi_0 e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \ldots + \mathbf{r}_N)}, \tag{5.48}$$

соответствующей плотности тока $ne\hbar\mathbf{q}/m$. Более общий случай макроскопического движения можно описать с помощью функции вида

$$\Phi = \Phi_0 e^{i[S(\mathbf{r}_1) + \ldots + S(\mathbf{r}_N)]}, \tag{5.49}$$

где $S(\mathbf{r})$ — медленно меняющаяся функция координат. Учитывая также наличие вектора-потенциала $\mathbf{A}$, окончательно запишем плотность тока в виде

$$\mathbf{j} = \frac{ne}{m}\left(\hbar\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right). \tag{5.50}$$

Предположим, что в сверхпроводнике реализуются лишь состояния, описываемые волновыми функциями типа (5.49). Тогда, беря ротор от обеих сторон выражения (5.50), можно легко получить уравнение Лондонов, т. е. прийти к эффекту Мейсснера. Чтобы изучить квантование потока, рассмотрим снова образец в виде кольца. Внутри кольца (вдали от его поверхности) $\mathbf{j} = 0$, а вектор-потенциал описывается соотношением

$$\mathbf{A} = \frac{c\hbar}{e}\nabla S. \tag{5.51}$$

Если через отверстие кольца проходит некоторый поток ϕ, то функция S становится неоднозначной. Действительно, рассмотрим снова контур C, который нигде не подходит к поверхности (см. фиг. 46). Тогда соотношение (5.51) определяет вектор-потенциал в любой точке контура C. Таким образом, поток, заключенный внутри контура C, равен

$$\int \mathbf{h}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \frac{c\hbar}{e}\oint_C \nabla S\cdot d\mathbf{l} = \frac{c\hbar}{e}\mathscr{S}, \tag{5.52}$$

где символ $\mathscr{S}$ обозначает приращение функции S после полного обхода вдоль контура C. Чтобы найти $\mathscr{S}$, заметим, что волновая функция Φ должна быть однозначной функцией координат $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$. Например, если $\mathbf{r}_1$ изменяется вдоль контура C, то после полного обхода мы должны вернуться к исходному значению функции. Учитывая, кроме того, что функция Φ_0 также однозначна, приходим к условию $\mathscr{S} = 2\pi n$, где n — целое число. Следовательно, величина кванта потока, согласно (5.52), равна ch/e.

Приведенный вывод, однако, неудовлетворителен в одном отношении [89]. Дело в том, что в действительности состояния $\Phi_0 \exp\{i[S(\mathbf{r}_1) + \ldots + S(\mathbf{r}_N)]\}$ не являются единственными состояниями макроскопического движения, осуществимыми в сверхпроводнике. Чтобы убедиться в этом, необходимо более детально знать вид истинной волновой функции Φ. Здесь мы проведем доказательство на простом примере волновой функции электронов сверхпроводника, удовлетворяющей периодическим граничным условиям

$$\Phi(x_1 \ldots x_i \ldots x_N) = \Phi(x_1 \ldots x_i + L \ldots x_N), \tag{5.53}$$

где индекс i пробегает все значения от 1 до N. Построим состояние поступательного движения всей системы, при котором на каждый электрон приходится импульс $\hbar\mathbf{q}$. Спаривая состояния $(\mathbf{k}+\mathbf{q}, \uparrow)$ и $(-\mathbf{k}+\mathbf{q}, \downarrow)$, можно получить волновые функции, вполне аналогичные использованным в теории БКШ.

1. Если $qL = \mathscr{S} = 2\pi n$, мы используем одноэлектронные состояния с волновыми векторами $\mathbf{k}$, удовлетворяющими обычному условию периодичности,

$$k_x L = 2\pi n_x \tag{5.54}$$

(n и n_x — целые числа).

2. Если $qL = \mathscr{S} = \pi(2n+1)$, то значения $\mathbf{k}$ должны удовлетворять иному граничному условию вида

$$k_x L = \pi(2n_x + 1). \tag{5.55}$$

В обоих случаях условие (5.53) выполняется.

Функции типа 1 аналогичны использованным Лондоном. Они отличаются от волновой функции БКШ (для покоящейся системы) лишь множителем $\exp[iq(x_1 + \ldots + x_N)]$. Это не относится, однако, к функциям типа 2. Оба типа функций в равной мере пригодны для описания макроскопических движений в сверхпроводнике. В обоих случаях полная энергия системы описывается выражением

$$E = E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} N, \tag{5.56}$$

которое получено в предположении, что

$$k_F L \gg 1 \quad \text{и} \quad \frac{L}{\xi_0} \gg 1. \tag{5.57}$$

Действительно, при выполнении условий (5.57) все суммы по допустимым значениям $\mathbf{k}$ могут быть заменены интегралами, величина которых не зависит от того, каким условием мы пользуемся — (5.54) или (5.55).

Найденные результаты легко перенести на случай отверстия. Теперь мы получаем, что $\mathscr{S} = \pi n$ и, следовательно, квант потока равен $hc/2e$.

Задача. Найти закон изменения коэффициентов u и v преобразования Боголюбова при полном обходе кольца.

Р е ш е н и е. Ответ, конечно, зависит от выбора калибровки. Возьмем калибровку, в которой параметр Δ вещественен; тогда после полного обхода кольца коэффициенты u и v приобретут по одинаковому множителю $(-1)^n$ (n — число квантов потока в кольце).

Для доказательства вернемся опять к простому случаю однородной трансляции, удовлетворяющей граничным условиям (5.53). Для калибровки, в которой $\Delta = |\Delta| \exp(2iqx)$, мы нашли, что (см. задачу на стр. 146)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}] \\ V_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}] \end{pmatrix}. \tag{5.58}$$

Из предыдущего ясно, что в случае $\mathscr{S} = \pi n$ одноэлектронные состояния $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ должны выбираться с таким расчетом, чтобы

$$e^{ik_x L} = (-1)^n$$

и

$$e^{iq_x L} = (-1)^n.$$

Отсюда следует, что коэффициенты u и v в выбранной калибровке являются периодическими функциями координат.

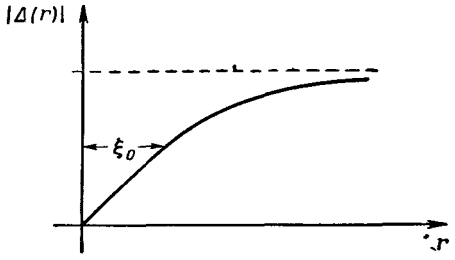
В калибровке, в которой параметр Δ веществен, получаем для искомых коэффициентов u' и v'

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \\ V_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \tag{5.59}$$

т. е. они действительно умножаются на $(-1)^n$ при замене x на $x + L$.

Задача. Рассмотреть низколежащие возбуждения сверхпроводника, локализованные вблизи центра вихревой нити [52, 90].

Решение. Ограничимся случаем *чистого* сверхпроводника второго рода и будем исходить из системы уравнений (5.18). Рассмотрение будем



Фиг. 47. Изменение амплитуды параметра порядка $|\Delta(r)|$ вблизи изолированной вихревой нити в чистом сверхпроводнике второго рода.

При $r = 0$ параметр порядка обращается в нуль, наклон кривой $|\Delta(r)|$ при этом остается конечным. Радиус области, в которой происходит заметное изменение $|\Delta(r)|$ по сравнению с вытекающим из теории БКШ значением Δ_∞ (показано пунктиром), составляет $\sim \xi_0$.

вести в цилиндрических координатах r, θ, z (ось z направлена вдоль нити) в калибровке, в которой $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta(r)| e^{-i\theta}$. Вектор-потенциал в этой специальной калибровке по-прежнему обозначим через $\mathbf{A}$. Амплитуда $|\Delta(r)|$ равна нулю при $r = 0$; при удалении от центра нити она растет (линейно при малых r) и, наконец, достигает значения Δ_∞ на расстояниях $r > \xi$ (фиг. 47).

Введем спинор

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

и исключим фазу потенциала Δ, положив

$$\hat{\varphi} = e^{-\sigma_z \theta/2} \hat{\psi}.$$

Тогда систему (5.18) можно записать в следующем компактном виде:

$$\sigma_z \left[\frac{1}{2m}\left(\mathrm{p} - \sigma_z \frac{e}{c} \mathrm{A} - \frac{\hbar \sigma_z}{2} \nabla\theta\right)^2 - E_F\right] \hat{\psi} + \sigma_x \Delta \hat{\psi} = \varepsilon \hat{\psi},$$

где σ_x, σ_z — матрицы Паули. Заметим, что $A \sim Hr$ и

$$\frac{eA}{ch\nabla\theta} \sim \left(\frac{H}{\phi_0}\right) r^2$$

(где $\phi_0 = ch/2e$ — квант потока). Для возбуждений рассматриваемого типа $r \lesssim \xi$ и

$$\frac{eA}{ch\nabla\theta} \sim \frac{H\xi^2}{\phi_0} \sim \frac{H}{H_{c2}} \ll 1,$$

т. е. всеми магнитными эффектами можно полностью пренебречь.

Решение будем искать в виде

$$\hat{\psi} = e^{ik_F z \cos\alpha} e^{i\mu\theta} \hat{f}(r),$$

где k_F — фермиевский волновой вектор, α — произвольный угол, а 2μ — нечетное целое число. Последнее условие обеспечивает изменение знака функции $\hat{\varphi}$ при полном обходе вокруг нити, как и требуется в случае калибровки с вещественным значением Δ и при наличии одного кванта потока. Опуская член с A в уравнении для $\hat{\psi}$, получаем

$$\sigma_z \frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{d^2\hat{f}}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\hat{f}}{dr} + \left(\mu - \frac{\sigma_z}{2}\right)^2 \frac{\hat{f}}{r^2} - k_F^2 \sin^2\alpha \hat{f}\right] + \sigma_x \Delta(r) \hat{f} = \varepsilon \hat{f}.$$

Это уравнение удается решить до конца в важной области $0 < \mu \ll k_F \xi$. Рассмотрим радиус r_c, удовлетворяющий условию

$$\left(\mu + \frac{1}{2}\right) k_F^{-1} \ll r_c \ll \xi.$$

Для $r < r_c$ членом с Δ можно пренебречь, и решение

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$f_\pm(r) = A_\pm J_{\mu \mp 1/2}[(k_F \sin\alpha \pm q) r],$$

где $J(x)$ — функция Бесселя, $q = \varepsilon/\hbar v_F \sin\alpha$; $A_\pm$ — произвольные коэффициенты.

Для $r > r_c$ решение $\hat{f}$ ищем в виде

$$\hat{f} = \hat{g}(r) H_m(k_F r \sin\alpha) + \text{Компл. сопр.} \qquad \left(m = \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}}\right),$$

где H_m — функция Ханкеля, а $\hat{g}$ — медленно меняющаяся амплитуда. Уравнение для $\hat{g}$ можно свести к следующему:

$$-i\hbar v_F \sigma_z \sin\alpha \frac{d\hat{g}}{dr} + \Delta\sigma_x \hat{g} = \left(\varepsilon + \frac{\mu\hbar^2}{2mr^2}\right)\hat{g}, \qquad v_F = \frac{\hbar k_F}{m}.$$

Для $\varepsilon \ll \Delta_\infty$ и $k_F r \gg \mu$ правая часть мала. Учитывая ее в первом приближении, находим

$$\hat{g} = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{2}\psi\right) \\ -i\exp\left(-\frac{i}{2}\psi\right) \end{pmatrix} e^{-K},$$

где

$$K(r) = (\hbar v_F \sin\alpha)^{-1} \int_0^r \Delta(r)\, dr,$$

$$\psi(r) = -\int_r^\infty e^{2K(r)-2K(r')} \left(2q + \frac{\mu}{k_F r'^2 \sin\alpha}\right) dr',$$

$$\psi(r_c) \approx -\mu(k_F r_c \sin\alpha)^{-1} + 2qr_c - 2\int_0^\infty e^{-2K(r')} \left(q - \frac{\mu\Delta(r')}{r' k_F v_F \sin^2\alpha}\right) dr'.$$

Произведем теперь сшивку решений при $r = r_c$, воспользовавшись асимптотическим разложением

$$J_m(z) = \text{const} \cdot z^{-1/2} \sin\left[z + \frac{m^2}{2z} - \frac{\pi}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]$$

и т. д. При $\mu \neq 0$ это дает

$$\psi(r_c) = 2qr_c - \mu(k_F r_c \sin\alpha)^{-1}.$$

Сравнивая этот результат с предыдущим выражением для $\psi(r_c)$, мы видим, что все члены, зависящие от r_c, выпадают, так что для собственных значений получаем

$$\varepsilon_{\mu\alpha} = \hbar q v_F \sin\alpha = \mu(k_F \sin\alpha)^{-1} \frac{\int_0^\infty [\Delta(r)/r]\, e^{-2K(r)}\, dr}{\int_0^\infty e^{-2K(r)}\, dr} =$$

$$= \mu(k_F \sin\alpha)^{-1} \left(\frac{d\Delta}{dr}\right)_{r=0} g(\alpha) \qquad (\mu \neq 0,\ \mu \ll k_F\xi).$$

Введенная здесь безразмерная функция $g(\alpha)$ зависит от точного вида потенциала $\Delta(r)$, но по порядку величины она всегда близка к единице. В частности, $g(0) = g(\pi) = 1$. Таким образом, собственные значения составляют по порядку $\mu\Delta_\infty/k_F\xi \sim \mu\Delta^2/E_F$, причем наименьшее значение соответствует $\mu = 1/2$.

Плотность состояний N_l, связанная с этими возбуждениями, описывается выражением

$$N_l(\varepsilon) = \left[\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)_{r=0}\right]^{-1} \frac{k_F^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2\alpha}{g(\alpha)}\, d\alpha \quad \text{при} \quad \frac{\Delta_\infty^2}{E_F} \ll \varepsilon \ll \Delta_\infty$$

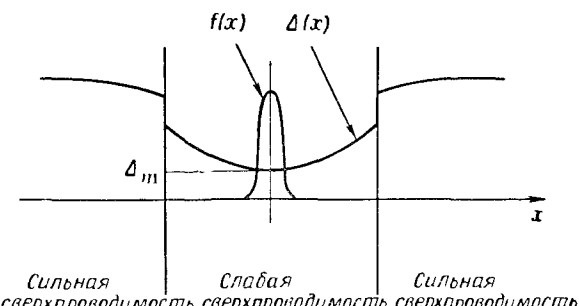
(для одного направления спина и на единицу длины нити). Отметим, что $N_l(\varepsilon) \sim N(0)\xi^2$, т. е. каждая нить эквивалентна нормальной области радиусом $\sim \xi$. В совокупности области, дающие вклад в плотность состояний при малых энергиях, занимают лишь долю порядка $\xi^2/d^2 \sim B/H_{c2}$ от всего объема образца. Они играют важную роль главным образом при низких температурах T [грубо говоря, когда $(\xi/d)^2 \exp(\Delta_\infty/T) > 1$]. В этих условиях тепло-

емкость линейно зависит от T, теплопроводность анизотропна (с максимальным значением вдоль направления нити), а скорость ядерной релаксации может в некоторых случаях определяться скоростью спиновой диффузии.

Край спектра возбуждений в неоднородных системах

Рассмотрим *чистый* металл в отсутствие полей и токов. Обычно потенциал спаривания Δ постоянен в пределах образца, а функции u и v представляют собой плоские волны. Легко проверить, что в этом случае энергетическая щель равна Δ. Однако в достаточно тонких образцах оказывается возможным создать пространственное изменение параметра $\Delta(\mathbf{r})$ (например, осаждая металл с другими свойствами на сверхпроводник).

Здесь мы рассмотрим особенно простой случай, показанный на фиг. 48. Потенциал спаривания изменяется только в направлении x



Фиг. 48. Вид потенциала спаривания $\Delta(x)$ для системы из трех металлических слоев.

Центральный слой является слабым сверхпроводником с минимальным значением параметров Δ, равным Δ_m. Амплитуда $f(x)$ описывает волновой пакет с малой пространственной протяженностью с центром в точке $x=0$; соответствующая энергия возбуждения очень близка к Δ_m.

и при $x=0$ имеет минимальное значение Δ_m. При $x\neq 0$ параметр Δ возрастает; расстояние, на котором происходит его заметное изменение, обычно довольно велико (по меньшей мере порядка ξ_0). Покажем, что пороговая энергия ε_0 квазичастиц, т. е. минимальное положительное собственное значение системы уравнений (5.18), приближенно равна Δ_m. В введенных ранее спинорных обозначениях система (5.18) имеет вид

$$\varepsilon\hat{\psi}=(\mathscr{H}_e\sigma_z+\Delta\sigma_x)\,\hat{\psi}=\hat{\Omega}\hat{\psi}, \tag{5.60}$$

где

$$\hat{\psi}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

а σ_x и σ_z — матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства высказанного утверждения о близости ε_0 к Δ_m воспользуемся вариационным принципом. К сожалению, оператор $\hat{\Omega}$ не является положительно определенным (ε и $-\varepsilon$ одновременно представляют собой его собственные значения), поэтому необходимо обратиться к рассмотрению оператора

$$\hat{\Omega}^2 = \mathscr{H}_e^2 + \Delta^2 + i\,[\mathscr{H}_e,\ \Delta]\,\sigma_y \tag{5.61}$$

[при выводе (5.61) мы воспользовались тождествами $\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x = 0$ и $\sigma_x\sigma_z - \sigma_z\sigma_x = -2i\sigma_y$]. Возьмем пробную функцию вида

$$\hat{\psi}(r) = e^{ikr_z} f(x)\,\hat{\varphi}_y, \tag{5.62}$$

где z — любое направление в плоскости, перпендикулярной оси x, а $\hat{\varphi}_y$ — постоянный спинор, такой, что $\sigma_y\hat{\varphi}_y = \pm\hat{\varphi}_y$. Поскольку энергия $\mathscr{H}_e$ отсчитывается от уровня Ферми, мы имеем просто

$$\mathscr{H}_e\hat{\psi} = e^{ikr_z}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)\hat{\varphi}_y. \tag{5.63}$$

(Функция f при сделанном выборе волнового вектора не имеет нулей в основном состоянии, что способствует понижению кинетической энергии.) Вычисляя среднее значение оператора $\hat{\Omega}^2$, получаем

$$\varepsilon^2 = \langle\hat{\psi}\,|\,\hat{\Omega}^2\,|\,\hat{\psi}\rangle = \int f^*(x)\left[\frac{\hbar^4}{4m^2}\frac{d^4}{dx^4} + |\Delta(x)|^2\right] f(x)\,dx \pm$$
$$\pm i\int f^*(x)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2},\ \Delta(x)\right] f(x)\,dx. \tag{5.64}$$

Для вещественной функции $f(x)$ последний интеграл обращается в нуль. Если, помимо этого, функция $f(x)$ не имеет особенностей и меняется на расстояниях порядка L, то член кинетической энергии дает вклад в ε^2, равный $\alpha(\hbar^2/2mL^2)^2$ (где α — численный коэффициент порядка единицы). Относительно потенциала спаривания $\Delta(x)$ сделаем предположение, что он меняется по параболическому закону вблизи Δ_m

$$\Delta(x) = \Delta_m\left(1 + \frac{x^2}{\delta^2}\right), \tag{5.65}$$

где $\delta \gg L$. Тогда член, соответствующий потенциальной энергии, примет вид $\Delta_m^2\left[1 + \beta(L/\delta)^2\right]$, где β — другой численный коэффициент. Таким образом,

$$\varepsilon^2 = \Delta_m^2 + \alpha\left(\frac{\hbar^2}{2mL^2}\right)^2 + \beta\Delta_m^2\frac{L^2}{\delta^2}. \tag{5.66}$$

Минимизируя это выражение относительно L, находим

$$\varepsilon_0^2 \approx \Delta_m^2 (1 + \mu^{2/3}), \tag{5.67}$$

где $\mu \sim \hbar^2/2m\delta^2\Delta_m$. Для $\delta \sim \xi \sim \hbar v_F/\Delta_m$ имеем $\mu \sim 1/k_F\xi_0 \sim 10^{-2} - 10^{-3}$, т. е. значение ε_0 на практике весьма близко к Δ_m.

Немагнитные сплавы. Теорема Андерсона

Изучим теперь спектр возбуждений сверхпроводящего сплава в *нулевом магнитном поле*. Мы должны решить систему уравнений (5.18)

$$\begin{aligned} \varepsilon u &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) - E_F\right) u + \Delta v, \\ \varepsilon v &= \left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - U(\mathbf{r}) + E_F\right) v + \Delta^* u; \end{aligned} \tag{5.68}$$

здесь $U(\mathbf{r})$ — полный потенциал Хартри, действующий на электрон в нормальном металле. При выводе уравнений (5.68) предполагалось, как обычно, что электрон-электронное взаимодействие носит примерно точечный характер, т. е. имеет вид $[-V\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]$, а потенциал $U(\mathbf{r})$ не зависит от спиновых индексов (т. е. сплав немагнитен). Потенциал примесей включен в $U(\mathbf{r})$, т. е. система уравнений (5.68) в принципе позволяет учесть и всевозможные эффекты многократного рассеяния электронов на примесях, поэтому она очень сложна. Положение заметно улучшается, если предположить, что $\Delta(\mathbf{r})$ не зависит от $\mathbf{r}$ даже при наличии примесей. Строго говоря, это не так[1]), однако, если примеси в химическом отношении не слишком сильно отличаются от исходного чистого материала, такое предположение допустимо [92][2]).

Уравнения значительно упрощаются, если с самого начала исходить из одноэлектронных волновых функций $w_n(\mathbf{r})$ для нормального металла. По определению,

$$\xi_n w_n(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) - E_F\right) w_n(\mathbf{r}). \tag{5.69}$$

Для чистого металла $w_n(\mathbf{r})$ представляют собой блоховские функции; для сплава они имеют значительно более сложный вид, так как описывают последовательные соударения электрона с различными примесями. К счастью, для приводимого ниже расчета нет необходимости знать детальный вид этих функций.

Заменим потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ константой Δ; тогда, очевидно, решения системы (5.68) будут зависеть от координат так же,

[1]) Точнее, область, где происходит изменение $\Delta(\mathbf{r})$ вблизи атома примеси, имеет атомные размеры, благодаря чему вклад от этих областей мал при малых концентрациях примеси. — *Прим. ред.*

[2]) См. также [91]. — *Прим. ред.*

как $w_n(\mathbf{r})$. Положим

$$u_n(\mathbf{r}) = w_n(\mathbf{r})\, u_n, \qquad v_n(\mathbf{r}) = w_n(\mathbf{r})\, v_n. \tag{5.70}$$

Тогда, как легко видеть, система (5.68) сводится к следующей:

$$(\varepsilon_n - \xi_n)\, u_n - \Delta v_n = 0, \qquad \Delta^* u_n - (\varepsilon_n + \xi_n)\, v_n = 0. \tag{5.71}$$

Отсюда, как обычно, находим

$$\varepsilon_n^2 = \xi_n^2 + |\Delta|^2. \tag{5.72}$$

Коэффициенты u_n и v_n зависят лишь от ξ_n и удовлетворяют условию нормировки

$$|u_n|^2 + |v_n|^2 = 1. \tag{5.73}$$

С помощью (5.71) их можно записать в явной форме

$$|u_n|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_n}{\varepsilon_n}\right), \qquad |v_n|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_n}{\varepsilon_n}\right). \tag{5.74}$$

Функции u_n, v_n и w_n будем считать вещественными; это допустимо, поскольку $w_n(\mathbf{r})$ представляют собой собственные функции вещественного оператора. Использование стоячих волн вместо бегущих окажется полезным и в дальнейшем при обсуждении свойств сплавов.

Условие самосогласованности (5.32) запишется в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = V \sum_n |w_n(\mathbf{r})|^2 \frac{\Delta}{2\sqrt{|\Delta|^2 + \xi_n^2}} \left[1 - 2f\left(\sqrt{|\Delta|^2 + \xi_n^2}\right)\right]. \tag{5.75}$$

Полезно ввести также плотность состояний $N(\mathbf{r})$ *в данной точке* $\mathbf{r}$ в нормальном металле для энергий вблизи уровня Ферми

$$N(\mathbf{r}) = \sum_n |w_n(\mathbf{r})|^2 \delta(\xi_n). \tag{5.76}$$

Используя это определение, запишем условие (5.75) в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = N(\mathbf{r}) V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\Delta(1-2f)}{2\sqrt{\xi^2 + |\Delta|^2}}\, d\xi. \tag{5.77}$$

Отсюда ясно, что условие самосогласованности (5.77) не является точным, так как, по предположению, Δ — константа, в то время как здесь параметр $\Delta(\mathbf{r})$ пропорционален $N(\mathbf{r})$ и потому может меняться в пространстве за счет примесей. Однако, если примеси химически

близки к основному материалу, то плотность состояний $N(\mathbf{r})$ мало отличается от своего среднего значения $\bar{N}$ и условие самосогласованности принимает вид

$$1 = \bar{N}V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{1-2f}{2\sqrt{\xi^2+|\Delta|^2}}\, d\xi. \tag{5.78}$$

По виду это уравнение совпадает с аналогичным уравнением для случая чистого металла, поэтому в первом приближении спектр возбуждений и остальные термодинамические свойства у сплава и у чистого металла одинаковы. Впервые на это обстоятельство указал Андерсон [93]. На опыте оно проявляется в отсутствии заметного влияния немагнитных примесей на критическую температуру сверхпроводников [1]).

§ 3. ЭФФЕКТ МЕЙССНЕРА В МЕТАЛЛАХ И СПЛАВАХ

Учет магнитного поля как возмущения

Теперь рассмотрим токи $\mathbf{j}$, индуцируемые слабым магнитным полем $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ в газе сверхпроводящих электронов. Математический аппарат, необходимый для такого расчета, содержится в § 2. Будем исходить из условия самосогласованности, записанного с помощью собственных состояний одноэлектронного гамильтониана:

$$\mathscr{H}_e = \frac{(\mathbf{p} - (e/c)\,\mathbf{A})^2}{2m} + U(\mathbf{r}) - E_F. \tag{5.79}$$

Мы не будем требовать постоянства потенциала $U(\mathbf{r})$ в пространстве и даже его периодичности. Это позволит нам вести рассмотрение одновременно для чистых металлов и сплавов.

В первом порядке по $\mathbf{H}$ (или $\mathbf{A}$) положим

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{r}) &= u_n^{(0)}(\mathbf{r}) + u_n^{(1)}(\mathbf{r}), \\ v_n(\mathbf{r}) &= v_n^{(0)}(\mathbf{r}) + v_n^{(1)}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{5.80}$$

где $u_n^{(0)}$ и $v_n^{(0)}$ — собственные функции системы (5.18) для случая $\mathbf{A} = 0$ [см. (5.70)]. Кроме того, примем

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 + \Delta_1(\mathbf{r}).$$

---

[1]) Существуют определенные эффекты, которые не удается описать с помощью грубого приближения для взаимодействия вида $-V\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Однако малость этих эффектов указывает на то, что сделанное приближение является достаточно хорошим, по крайней мере при предварительном рассмотрении.

В общем случае добавочный член Δ_1 отличен от нуля. Другими словами, *самосогласованное поле* Δ *может измениться в результате наложения магнитного поля* Это замечание, принадлежащее Боголюбову, необходимо иметь в виду, чтобы не нарушить градиентной инвариантности.

Рассмотрим типичный случай, когда добавка Δ_1 может быть отлична от нуля. Положим $\mathbf{A} = \nabla\chi(\mathbf{r})$ (где χ — произвольная функция), тогда $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0$. Легко проверить, что система уравнений (5.18) совместно с уравнением самосогласованности (5.32) имеет решение

$$\begin{aligned} u_n &= u_n^{(0)} e^{(ie/\hbar c)\chi(\mathbf{r})}, \\ v_n &= v_n^{(0)} e^{(-ie/\hbar c)\chi(\mathbf{r})}, \\ \Delta(\mathbf{r}) &= \Delta_0 e^{(2ie/\hbar c)\chi(\mathbf{r})}. \end{aligned} \tag{5.81}$$

Как и следовало ожидать, $\mathbf{j} = 0$. Разлагая найденное решение в ряд, имеем в первом порядке по χ (или $\mathbf{A}$):

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= \frac{ie}{\hbar c} u_n^{(0)} \chi, \\ v_n^{(1)} &= -\frac{ie}{\hbar c} v_n^{(0)} \chi, \\ \Delta_1 &= \frac{2ie}{\hbar c} \Delta_0 \chi. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Таким образом, в этом частном случае $\Delta_1 \neq 0$ Вообще в линейном приближении связь между Δ_1 и $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\Delta_1(\mathbf{r}) = \sum_\alpha \int P_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_\alpha(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}', \tag{5.83}$$

где $\alpha = x, y, z$, а интеграл берется по объему образца. Для однородного и изотропного металла ядро $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ зависит лишь от разности $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и представляет собой вектор, направленный вдоль $\mathbf{R}$. Вид функции $\mathbf{P}(\mathbf{R})$ легко определить для только что рассмотренного частного случая, для которого

$$\frac{2ie}{\hbar c} \Delta_0 \chi(\mathbf{r}) = \int \mathbf{P}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'. \tag{5.84}$$

Ограничимся рассмотрением частного класса функций $\chi(\mathbf{r})$, убывающих на бесконечности ($r \to \infty$). Интегрируя по частям, перепишем (5.84) в следующем виде:

$$\frac{2ie}{\hbar c} \Delta_0 \chi(\mathbf{r}) = -\int \chi(\mathbf{r}')\, \mathrm{div}\, \mathbf{P}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'.$$

Отсюда

$$\mathrm{div}\, \mathbf{P}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{2ie}{\hbar c} \Delta_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Поскольку вектор $\mathbf{P}$ направлен по радиусу $\mathbf{R}$, написанное уравнение имеет единственное решение

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}) = -\frac{ie\Delta_0}{2\pi\hbar c}\frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{ie\Delta_0}{2\pi\hbar c}\nabla\left(\frac{1}{R}\right). \tag{5.85}$$

Это выражение применимо также и для сплавов, если нас интересует усредненное по всем конфигурациям примесей значение Δ_I (после усреднения система снова становится однородной и изотропной).

Зная $\mathbf{P}(\mathbf{R})$, можно доказать следующую теорему: если вектор-потенциал $\mathbf{A}$ выбран в лондоновской калибровке (т. е. $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ и равна нулю нормальная к поверхности образца компонента $\mathbf{A}$), то $\Delta_\mathrm{I}=0$. В самом деле,

$$\Delta_\mathrm{I}(\mathbf{r}) = \frac{ie\Delta_0}{2\pi\hbar c}\int \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{ie\Delta_0}{2\pi\hbar c}\left(\int \frac{1}{R}\operatorname{div}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}' - \int \frac{1}{R}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma\right) = 0; \tag{5.86}$$

здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности образца. Важно подчеркнуть, что эта теорема верна лишь при выполнении следующих условий: 1) металл изотропен; 2) взаимодействие между электронами носит точечный характер. Действительно, при учете нелокальности взаимодействия потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ зависит от двух аргументов. Изменение величины Δ в этом случае имеет вид

$$\Delta_\mathrm{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int K_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')\,A_\alpha(\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}''. \tag{5.87}$$

Соображения, основанные на симметрии задачи, не позволяют теперь свести Δ_I к градиенту некоторой функции [1]).

Найдем теперь в явном виде поправки $u^{(1)}$ и $v^{(1)}$ в лондоновской калибровке ($\Delta_\mathrm{I}=0$), в которой вычисления имеют наиболее простой вид. Выпишем сначала уравнения (5.18) и (5.19), сохранив в них лишь члены, линейные по $\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}
&\left[\varepsilon_n + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - U(\mathbf{r})\right]u_n^{(1)}(\mathbf{r}) - \Delta v_n^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{ie\hbar}{2mc}(\mathbf{A}\cdot\nabla + \nabla\cdot\mathbf{A})\,u_n^{(0)}(\mathbf{r}),\\
&\left[\varepsilon_n - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right]v_n^{(1)}(\mathbf{r}) - \Delta^* u_n^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{ie\hbar}{2mc}(\mathbf{A}\cdot\nabla + \nabla\cdot\mathbf{A})\,v_n^{(0)}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Далее, разложим $u_n^{(1)}$ и $v_n^{(1)}$ в ряд по ортонормированной системе функций w_n:

$$\begin{aligned}
u_n^{(1)}(\mathbf{r}) &= \sum_m a_{nm} w_m(\mathbf{r}),\\
v_n^{(1)}(\mathbf{r}) &= \sum_m b_{nm} w_m(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{5.89}$$

[1]) Детальное количественное рассмотрение показывает, что поправки, возникающие за счет размазанности взаимодействия, малы и мало влияют на диамагнетизм [94].

Напомним, что функции w_n мы считаем вещественными. Умножим каждое из уравнений (5.88) на w_m и проинтегрируем обе стороны по $\mathbf{r}$. Используя значения (5.74) для $u_n^{(0)}$ и $v_n^{(0)}$, находим

$$\begin{aligned} a_{nm}(\varepsilon_n - \xi_m) - \Delta b_{nm} &= iF_{nm}u_n, \\ -\Delta a_{nm} + b_{nm}(\varepsilon_n + \xi_m) &= iF_{nm}v_n, \end{aligned} \tag{5.90}$$

где

$$F_{nm} = \frac{e\hbar}{2mc}\int w_m(\mathbf{r})(\mathbf{A}\cdot\nabla + \nabla\cdot\mathbf{A})w_n(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = -F_{mn}. \tag{5.91}$$

Решение системы (5.90) имеет вид

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{iF_{nm}}{\xi_n^2 - \xi_m^2}[(\varepsilon_n + \xi_m)u_n + \Delta v_n], \\ b_{nm} &= \frac{iF_{nm}}{\xi_n^2 - \xi_m^2}[(\varepsilon_n - \xi_m)v_n + \Delta u_n]. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Находя $u_n^{(1)}$ и $v_n^{(1)}$ с помощью этих выражений и используя уравнения самосогласованности (5.32), прямым вычислением можно убедиться, что в лондоновской калибровке $\Delta_1 = 0$, как и предполагалось с самого начала.

Связь диамагнитного отклика с проводимостью системы в нормальном состоянии

Зная волновую функцию в первом порядке по $\mathbf{A}$, можно вычислить ток

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathrm{Re}\left[\left\langle\Psi^+(\mathbf{r})\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\Psi(\mathbf{r})\right\rangle\right].$$

При дальнейшем обсуждении мы ограничимся случаем абсолютного нуля ($T = 0$). В нулевом порядке по $\mathbf{A}$ очевидно, $j = 0$. В первом порядке, выражая Ψ через γ, производя усреднение и разлагая $u = u^{(0)} + u^{(1)}$ и т. д., находим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{ie\hbar}{2m}\sum_n (v_n^{(0)*}\nabla v_n^{(1)} + v_n^{(1)*}\nabla v_n^{(0)} - \text{Компл. сопр.}) =$$

$$= -\frac{ie\hbar}{2m}\sum_{n,\,m}\left[v_n(w_n\nabla w_m b_{nm} + w_m\nabla w_n b_{nm}^*) - \text{Компл. сопр.}\right], \tag{5.93}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{ie\hbar}{2m}\sum_{n,\,m}\left[v_n(b_{nm} - b_{nm}^*)(w_n\nabla w_m - w_m\nabla w_n)\right]. \tag{5.94}$$

Согласно (5.92), имеют место следующие свойства:

$$b^*_{nm} = -b_{nm},$$

$$v_n b_{nm} = iF_{nm}R_{nm},$$

где

$$R_{nm} = \frac{(\varepsilon_n - \xi_n)(\varepsilon_n - \xi_m) + \Delta^2}{2\varepsilon_n(\xi_n^2 - \xi_m^2)}.$$

Выпишем симметричную часть коэффициента R_{nm}

$$\frac{1}{2}L(\xi_n, \xi_m) = \frac{R_{nm} + R_{mn}}{2} = -\frac{\Delta^2 - \xi_n\xi_m + \varepsilon_n\varepsilon_m}{\varepsilon_n\varepsilon_m(\varepsilon_n + \varepsilon_m)}.$$

Связь тока с вектором-потенциалом имеет вид

$$j_\mu(\mathbf{r}) = \sum_\nu \int S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_\nu(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \quad (\mu, \nu = x, y, z); \qquad (5.95)$$

здесь

$$S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{c}\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)^2 \sum_{n,m} L(\xi_n, \xi_m)\, p_{\mu nm}(\mathbf{r})\, p_{\nu nm}(\mathbf{r}') - \frac{ne^2}{mc}\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \qquad (5.96)$$

где через $p_{\mu nm}$ мы обозначили величину

$$p_{\mu nm}(\mathbf{r}) = [w_n(\mathbf{r})\nabla_\mu w_m(\mathbf{r}) - w_m(\mathbf{r})\nabla_\mu w_n(\mathbf{r})].$$

Для чистого металла, имеющего неограниченные размеры, функции w_n являются плоскими волнами, и величины p_{nm} можно найти сразу. Однако на практике необходимо учитывать наличие примесей и влияние поверхности образца; построить w_n в явном виде в этих случаях не удается.

Тем не менее вид $S_{\mu\nu}$ нетрудно получить, замечая, что электропроводность $\sigma_{\mu\nu}$ *нормального* металла содержит те же матричные элементы. Этим обстоятельством объясняется также успех феноменологического описания Пиппарда, которое приводит для сверхпроводника к соотношению между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$, совершенно аналогичному соотношению между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ в случае нормального металла.

Точнее говоря, проводимость $\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \Omega)$ на частоте Ω определяется следующим образом. Приложенное к образцу электрическое поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}')\, e^{-i\Omega t} + \text{Компл. сопр.}$$

индуцирует в каждой его точке $\mathbf{r}$ ток с плотностью

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})\, e^{-i\Omega t} + \text{Компл. сопр.},$$

который связан с полем линейным соотношением

$$j_\mu(\mathbf{r}) = \int \sigma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \Omega) E_\nu(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'.$$

Мы можем найти величину $\sigma_{\mu\nu}$ в явном виде, воспользовавшись соотношением Чемберса между током и полем (см. [95])[1])

$$j_\mu(\mathbf{r}) = \frac{N(0) e^2 v_F}{2\pi} \sum_\nu \int \frac{R_\mu R_\nu}{R^4} e^{(i\Omega/v_F - 1/l)R} E_\nu(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}', \qquad (5.97)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, l — транспортная длина свободного пробега. Интегрирование производится *только по объему образца*. При выводе соотношения (5.97) используются три предположения.

1. Отражение электронов от поверхности считают диффузным, как это имеет место в большинстве случаев.

2. Предполагается, что поле $\mathbf{E}$ и ток $\mathbf{j}$ носят поперечный характер ($\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$,) и не имеют составляющих, нормальных к поверхности. Это ограничение не должно служить поводом для беспокойства, поскольку в сверхпроводящем состоянии возмущение (вектор-потенциал $\mathbf{A}$) в лондоновской калибровке также является поперечным.

3. Принимается, что частота Ω меньше, чем $k_B T/\hbar$. Из (5.97) находим, что тензор электропроводности для точек $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, находящихся внутри образца, описывается выражением

$$\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{N(0) e^2 v_F}{2\pi} \frac{R_\mu R_\nu}{R^4} e^{i\Omega R/v_F} e^{-R/l}; \qquad (5.98)$$

если же хотя бы одна из точек $\mathbf{r}$ или $\mathbf{r}'$ лежит вне образца, то $\sigma = 0$. Фактически нам потребуется лишь вещественная часть $\sigma_{\mu\nu}$, определяющая диссипируемую мощность

$$W = \sum_{\mu,\nu} \int \left\{ \left[E_\mu^*(\mathbf{r}) E_\nu(\mathbf{r}') + \text{Компл. сопр.} \right] \operatorname{Re}\left[\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \Omega)\right] \right\} d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'. \qquad (5.99)$$

Выразим теперь $\sigma_{\mu\nu}$ через одноэлектронные волновые функции нормального металла $w_n(\mathbf{r})$ и покажем, что величину $\operatorname{Re}\sigma_{\mu\nu}$ можно представить в виде, аналогичном выражению (5.96) для $S_{\mu\nu}$. Будем исходить из одноэлектронного гамильтониана для нормального металла

$$\mathscr{H}_e = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U_0(\mathbf{r}), \qquad (5.100)$$

[1]) Вывод соотношения Чемберса имеется также в статье Бардина в книге [12]. — *Прим. ред.*

где $U_0(\mathbf{r})$ — потенциал решетки с учетом примесей и поверхности образца. Переменное электрическое поле не содержится в U_0, а выражается через вектор-потенциал

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i\Omega}{c}\mathbf{A}. \tag{5.101}$$

В силу того что поле $\mathbf{E}$ представляет собой малое возмущение, можно написать

$$\mathscr{H}_e = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1,$$

где

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_0 &= \frac{p^2}{2m} + U_0, \\ \mathscr{H}_1 &= \frac{e}{2mc}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{5.102}$$

Собственными функциями гамильтониана $\mathscr{H}_0$ являются $w_n(\mathbf{r})$. Возмущение $\mathscr{H}_1$ осциллирует во времени и вызывает переходы $n \to m$, для которых $\xi_m - \xi_n = \pm\hbar\Omega$. Вероятность перехода в единицу времени описывается выражением

$$g_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar}[1 - f(\xi_m)]\, f(\xi_n)\, |\langle n|\mathscr{H}_1|m\rangle|^2 \times \\ \times [\delta(\xi_n - \xi_m + \hbar\Omega) + \delta(\xi_n - \xi_m - \hbar\Omega)], \tag{5.103}$$

где

$$\langle n|\mathscr{H}_1|m\rangle = \frac{ie\hbar}{2mc}\int w_n(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla)\, w_m\, d\mathbf{r} = \\ = \frac{ie\hbar}{2mc}\sum_{\nu}\int A_\nu(\mathbf{r})\, p_{\nu nm}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}. \tag{5.104}$$

Зная g_{nm}, найдем диссипируемую мощность

$$W = \sum_{n,\,m} g_{nm}(\xi_m - \xi_n). \tag{5.105}$$

Из сравнения (5.105) и (5.99) следует

$$\mathrm{Re}\,\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}';\ \Omega) = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{e\hbar}{m}\right)^2 \sum_{n,\,m}\frac{f(\xi_n) - f(\xi_m)}{\hbar\Omega}\times \\ \times\, p_{\mu nm}(\mathbf{r})\, p_{\nu nm}(\mathbf{r}')\,\delta(\xi_n - \xi_m - \hbar\Omega). \tag{5.106}$$

Чтобы сравнить это выражение с формулой Чемберса, рассмотрим область $\hbar\Omega \ll k_B T$; здесь

$$\frac{f(\xi_n) - f(\xi_m)}{\hbar\Omega} = \frac{f(\xi_n) - f(\xi_m)}{\xi_n - \xi_m} \approx \frac{df}{d\xi} \approx -\delta(\xi) \qquad (\xi_n \approx \xi_m = \xi).$$

Таким образом, выражение (5.106) принимает вид

$$\mathrm{Re}\,\sigma_{\mu\nu}=\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{e\hbar}{m}\right)^2 N(0)\sum_m \overline{p_{\mu nm}(\mathbf{r})\,p_{\nu nm}(\mathbf{r}')}\,\delta(\xi_n-\xi_m-\hbar\Omega), \quad (5.107)$$

где символ $\overline{(\ )}$ означает усреднение по одноэлектронным состояниям на поверхности Ферми нормального металла [1]).

Расчет диамагнитных токов [2])

Выражения (5.107) и (5.96) показывают, что выражение для электропроводности $\sigma_{\mu\nu}$ в нормальном состоянии содержит те же матричные элементы, что и ядро $S_{\mu\nu}$, описывающее диамагнитный отклик сверхпроводника. Произведя в (5.96) замену

$$\sum_n \to N(0)\int d\xi_n,$$

запишем это фундаментальное соотношение в виде

$$S_{\mu\nu}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=\frac{\hbar}{2\pi c}\int L(\xi,\ \xi')\,\mathrm{Re}\left[\sigma_{\mu\nu}\left(\mathbf{r},\ \mathbf{r}';\ \frac{\xi-\xi'}{\hbar}\right)\right]d\xi\,d\xi' - \\ -\frac{ne^2}{mc}\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (5.108)$$

Подставляя сюда выражение Чемберса для $\sigma_{\mu\nu}$, находим

$$S_{\mu\nu}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=\frac{3ne^2}{4\pi mc\xi_0}\frac{R_\mu R_\nu}{R^4}J(R)\,e^{-R/l}-\frac{ne^2}{mc}\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{R}), \quad (5.109)$$

где

$$J(R)=\frac{1}{\pi^2\Delta(0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\left[\frac{(\xi-\xi')R}{\hbar v_F}\right]L(\xi,\ \xi')\,d\xi\,d\xi' \quad (5.110)$$

и введены обозначения $\xi_0=\hbar v_F/\pi\Delta(0)$, $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Из вида $L(\xi,\ \xi')$ легко заключить, что в написанный интеграл важный вклад вносит область $\xi-\xi'\sim\Delta$. Поэтому область пространства, где ядро $J(R)$ отлично от нуля, имеет размер порядка $\hbar v_F/\pi\Delta(0)=\xi_0$ (численный коэффициент в определении ξ_0 нам понадобится позже). Переходя к явному вычислению $J(R)$, сделаем замену переменных $\xi=\Delta\,\mathrm{sh}\,\theta$,

---

[1]) Заметим, что при $|\xi_n|\ll E_F$ результат усреднения в (5.107) сильно зависит от $\hbar\Omega$ и слабо от ξ_n.

[2]) Более строгое рассмотрение читатель может найти в работе Маттиса и Бардина [96].— *Прим. ред.*

$\xi' = \Delta \operatorname{sh} \theta'$ и положим $\alpha = (\theta - \theta')/2$, $\beta = (\theta + \theta')/2$. Тогда

$$J(R) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta} \cos\left[\frac{2\Delta(0) R}{\hbar v_F} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \beta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} du \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) \cos\left[\frac{2\Delta(0) R}{\hbar v_F} u \operatorname{ch} \beta\right], \quad (5.111)$$

где $u = \operatorname{sh} \alpha$. Выполняя интегрирование по u, окончательно находим

$$J(R) = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)} \delta(\mathbf{R}) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \beta} e^{-2\Delta(0) R \operatorname{ch} \beta / \hbar v_F}. \quad (5.112)$$

Здесь первый член отличен от нуля лишь в начале координат. Выполняя в (5.95) интегрирование по $\mathbf{r}'$, мы обнаруживаем, что он в точности компенсирует член $(-ne^2/mc)\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{R})$ выражения (5.109). Таким образом, можно написать

$$S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{3ne^2}{4\pi mc\xi_0} \frac{R_\mu R_\nu}{R^4} e^{-R/l} I(R), \quad (5.113)$$

где

$$I(R) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{d\beta}{\operatorname{ch} \beta} e^{-2R \operatorname{ch} \beta / \pi \xi_0}. \quad (5.114)$$

Формулы (5.95), (5.113) и (5.114) дают полное решение задачи о нахождении токов, индуцированных в сверхпроводнике слабым статическим магнитным полем.

ВЫВОДЫ

1. При $\mathbf{A} \neq 0$ в сверхпроводнике существуют незатухающие токи. К сожалению, этот решающий результат был получен после длинных вычислений и его физический смысл не вполне ясен. Мы постараемся разобраться в этом вопросе в гл. VI.

2. В чистом металле ($l = \infty$) радиус действия ядра $S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ определяется функцией $I(R)$ и имеет порядок ξ_0. В теории Пиппарда предполагается, что $I(R) = e^{-R/\xi_0}$; точная зависимость (5.114) не является экспоненциальной, но различие мало. В частности, отметим, что при $T = 0$

$$I(0) = 1,$$

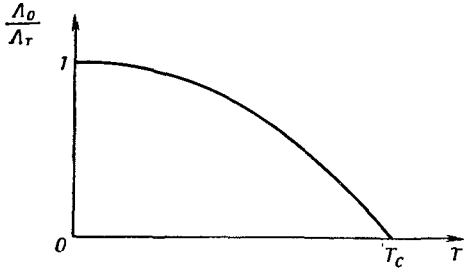
$$\int\limits_0^\infty I(R)\, dR = \xi_0,$$

т. е. в этом пункте точный результат и формула Пиппарда совпадают.

3. Если вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ в бесконечном чистом металле медленно меняется на расстояниях порядка ξ_0, его можно вынести за знак интеграла (5.95). Интегрируя остающееся выражение, получаем соотношение Лондонов

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{ne^2}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r}),$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{j} = -\frac{ne^2}{cm}\mathbf{H}. \tag{5.115}$$

4. При наличии примесей ядро $S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ уменьшается из-за появления множителя $e^{-R/l}$, где l — транспортная длина свободного пробега электронов в нормальном металле. Этот результат также был предсказан Пиппардом до создания микроскопической теории.



Фиг. 49. Температурная зависимость относительной величины диамагнитного отклика для лондоновского сверхпроводника.

5. Если вектор-потенциал $\mathbf{A}$ в случае загрязненного металла медленно меняется на расстояниях порядка $(1/\xi_0 + 1/l)^{-1}$, его, как и прежде, можно вынести из-под знака интеграла; тогда мы получим новое соотношение лондоновского типа, обычно записываемое в форме

$$-c\Lambda_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

или

$$-c\Lambda_0 \operatorname{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}, \tag{5.116}$$

где

$$\Lambda_0^{-1} = \frac{ne^2}{m\xi_0}\int_0^\infty I(R)\, e^{-R/l}\, dR < \frac{ne^2}{m} \tag{5.117}$$

при $T = 0$. В частности, при $l \ll \xi_0$ функцию $I(R)$ можно положить равной единице; тогда

$$\Lambda_0^{-1} = \frac{ne^2}{m}\left(\frac{l}{\xi_0}\right) \quad (l \ll \xi_0). \tag{5.118}$$

6. Наше рассмотрение относится к случаю $T = 0$. Тем же способом можно рассмотреть случай $T \neq 0$. Оказывается, что при этом соотношение (5.95) по-прежнему применимо, но определение ядра $L(\xi, \xi')$ необходимо обобщить. Интегрирование должно выполняться численно. При этом оказывается, что вид координатной зависимости ядра $S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ *почти не меняется с температурой*. В частности, радиус действия ядра в чистом металле по-прежнему составляет примерно ξ_0 даже при $T \to T_c$. Наоборот, нормировка ядра изменяется, поскольку сверхпроводящие токи убывают с ростом температуры, пока не исчезнут совсем при $T = T_c$. Нормировка обычно задается с помощью зависящего от температуры коэффициента Λ_T, определяемого соотношением

$$\int S_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}';\ T)\, d\mathbf{r}' = \frac{1}{c\Lambda_T}. \tag{5.119}$$

Температурная зависимость отношения Λ_0/Λ_T приведена на фиг. 49. Позже мы вернемся к обсуждению параметров, определяющих Λ_T при $T = T_c$, в связи с теорией Гинзбурга — Ландау.

ЛИТЕРАТУРА

Метод самосогласованного поля и теорема Андерсона

Anderson P. W., Proc. 8 th Internat. Conf. Low Temp. Phys., London, 1963.

Квантование потока и дальний порядок в сверхпроводниках

Yang C. N., Rev. Mod. Phys., **34**, 694 (1962).

Эффект Мейсснера и его связь с энергетической щелью в теории БКШ

Tinkham M., Superconductivity, New York, 1965.

Глава VI

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Прежде всего повторим еще раз все, что нам известно о микроскопических свойствах сверхпроводника в присутствии статического магнитного поля **H**. Первоначально для определения незатухающих токов **j**, индуцированных полем, мы использовали уравнение Лондонов

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2(T)}\mathbf{H}. \tag{6.1}$$

Однако уравнение (6.1) применимо лишь при выполнении следующих условий:

1. Глубина проникновения $\lambda(T)$ должна быть больше, чем $(1/\xi_0 + 1/l)^{-1}$, где $\xi_0 = 0{,}18\,(\hbar v_F/k_B T_c)$, а l — длина свободного пробега.

2. Поле **H** должно быть слабым, чтобы его можно было рассматривать как возмущение.

3. Плотность сверхпроводящих электронов $n_s(\mathbf{r})$ должна быть примерно постоянной в пространстве.

Затем мы ослабили первое условие, заменив уравнение (6.1) нелокальным соотношением Пиппарда. Однако условия 2 и 3 остаются в силе, что не позволяет нам решить, например, задачу о границе, отделяющей нормальную область ($H = H_c$, $n_s = 0$) от сверхпроводящей ($H = 0$, $n_s \neq 0$) для сверхпроводника первого рода.

В принципе мы могли бы вернуться к общему методу и попытаться

а) написать уравнения движения возбуждений

$$\varepsilon u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}\left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - E_F\right] u(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r})\, v(\mathbf{r}),$$

$$\varepsilon v(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2m}\left[\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - E_F\right] v(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r})\, u(\mathbf{r});$$

б) задаться конкретным видом пространственной зависимости потенциала спаривания $\Delta(\mathbf{r})$;

в) вычислить u и v (что позволит нам найти плотность тока и другие физические величины);

г) проверить с помощью уравнения самосогласованности, что выбранная форма для $\Delta(\mathbf{r})$ является правильной, т. е.

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_n u_n v_n^* \left[1 - 2f(\varepsilon_n)\right].$$

Однако на практике такая программа является чрезвычайно трудной и громоздкой.

Расчеты значительно упрощаются, если ограничиться окрестностью температуры перехода T_c. Действительно, при $T \to T_c$

1) глубина проникновения $\lambda(T)$ становится большой (в лондоновском предельном случае $\lambda(T) \sim n_s^{-1/2}$, а число сверхпроводящих электронов n_s стремится к нулю, как $T_c - T$;

2) толщина границы, разделяющей области N и S, также становится большой. Из эмпирических данных для чистых сверхпроводников первого рода следует, что ее толщина меняется как $\xi_0 (1 - T/T_c)^{-1/2}$.

Вообще во многих физических ситуациях можно считать ток $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ *медленно меняющимися функциями координат* при условии, что температура достаточно близка к температуре перехода. В этих условиях оказывается, что физические свойства можно изучать с помощью довольно простых уравнений, выводом которых мы сейчас и займемся.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим однородный сверхпроводящий металл или сплав. Построим сначала выражение для свободной энергии для случая, когда потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ и вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ являются произвольными медленно меняющимися функциями координат. Минимизируя затем полученную энергию, мы придем к уравнению для $\Delta(\mathbf{r})$ и к выражению для тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.

а) Вернемся сначала к тривиальному случаю, когда, во-первых, параметр Δ одинаков во всех точках пространства и, во-вторых, магнитное поле отсутствует. Для произвольного фиксированного значения Δ мы можем определить значения u и v, а затем вычислить с помощью метода, изложенного в гл. IV, плотность свободной энергии F как функцию Δ. В частности, для малых значений Δ (что соответствует температуре T, близкой к T_c) получим

$$F = F_n + A(T)|\Delta|^2 + \frac{1}{2} B(T)|\Delta|^4 + \ldots, \tag{6.2}$$

где F_n — свободная энергия нормальной фазы; коэффициенты A и B, согласно теории БКШ, при $T \to T_c$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A(T) &= N(0) \frac{T - T_c}{T_c}, \\ B(T) &= 0{,}098 \frac{N(0)}{(k_B T_c)^2}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Существенно, что в разложении (6.2) содержатся только четные по Δ члены.

В более общем случае можно предположить, что точное выражение для свободной энергии дается разложением типа (6.2), коэффициенты A и B которого обладают следующими свойствами: коэффициент A отрицателен при $T < T_c$ и обращается в нуль при $T = T_c$, наклон $(dA/dT)_{T_c}$ остается конечным; коэффициент B положителен и конечен при $T = T_c$, так что его можно заменить значением при $T = T_c$.

Для $T < T_c$ минимуму F соответствует отличное от нуля значение Δ

$$\Delta = \Delta_0(T),$$

$$\Delta_0^2 = -\frac{A}{B} = 10{,}2 k_B^2 T_c (T_c - T), \tag{6.4}$$

которое является равновесным в отсутствие магнитного поля. В соответствии с этим свободная энергия равна

$$F = F_s = F_n - \frac{A^2}{2B}. \tag{6.5}$$

При наших предположениях относительно A и B разность $F_n - F_s = H_c^2/8\pi$ пропорциональна $(T_c - T)^2$, что характерно для любых фазовых переходов второго рода.

б) Будем теперь считать, что параметр Δ медленно изменяется от точки к точке, однако по-прежнему $\mathbf{H} = \mathbf{A} = 0$. Найдем, какие изменения нужно при этом внести в выражение (6.2) для свободной энергии. Так как в отсутствие магнитного поля равновесию соответствует $\Delta = \text{const}$, последующие члены разложения должны иметь вид $(\partial\Delta/\partial x)^2$, $(\partial\Delta/\partial x)(\partial\Delta/\partial y)$ и т. д. Для простоты в дальнейшем мы изучим только случай *кубической симметрии*. Тогда

$$F = F_n + A|\Delta|^2 + \frac{B}{2}|\Delta|^4 + C\left[\left|\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial\Delta}{\partial z}\right|^2\right]. \tag{6.6}$$

Будем считать, что коэффициент C отличен от нуля и положителен при $T = T_c$. Позднее с помощью микроскопического расчета мы покажем, что для чистого металла $C \sim N(0)\xi_0^2$, т. е. энергия неоднородностей, которой соответствует последний член в разложении (6.6), составляет

$$\sim N(0)\,\Delta^2 \xi_0^2 \left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2.$$

Выражение (6.6), связывающее плотность свободной энергии F с параметром порядка Δ в окрестности температуры перехода, было предложено Ландау в качестве исходного пункта при построении общей феноменологической теории фазовых переходов второго рода

(см. [97]). Например, в ферромагнетике роль параметра порядка играет намагниченность [1]).

Задача. Рассмотреть флуктуации потенциала спаривания Δ в нормальной фазе ($T > T_c$) в отсутствие поля.

Р е ш е н и е. Вероятность найти конфигурацию с определенной пространственной зависимостью потенциала спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ пропорциональна $\exp(-\mathcal{F}/k_BT)$, где $\mathcal{F}$ — свободная энергия всего образца [вычисляемая с помощью выражения (6.6)]. Для $T > T_c$ в разложении (6.6) достаточно удержать лишь члены порядка Δ^2. В калибровке, в которой $\mathbf{A} = 0$, а параметр Δ вещественен, имеем

$$\mathcal{F} = \int d\mathbf{r}\,[A\,|\,\Delta(\mathbf{r})\,|^2 + C\,|\,\nabla\Delta(\mathbf{r})\,|^2] = L^3 \sum_{\mathbf{k}} (A + Ck^2)\,|\,\Delta_{\mathbf{k}}\,|^2,$$

где

$$\Delta_{\mathbf{k}} = L^{-3} \int \Delta(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r},$$

а L^3 — объем образца. (Как мы увидим из дальнейшего, это уравнение справедливо для чистого сверхпроводника при условии $k\xi_0 \ll 1$.) Термодинамическое усреднение дает

$$\langle \Delta_{\mathbf{k}} \rangle = 0,$$

$$\langle |\Delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{\int e^{-\mathcal{F}/k_BT}\,|\,\Delta_{\mathbf{k}}\,|^2\, d\Delta_{\mathbf{k}}}{\int e^{-\mathcal{F}/k_BT}\, d\Delta_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2L^3}\,\frac{k_BT}{A + Ck^2}.$$

Среднее $\langle |\Delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ можно связать с пространственной корреляционной функцией параметра Δ

$$\langle |\Delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = L^{-6} \int \langle \Delta(\mathbf{r})\,\Delta(\mathbf{r}') \rangle\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' =$$

$$= L^{-3} \int \langle \Delta(0)\,\Delta(\mathbf{R}) \rangle\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d\mathbf{R}$$

[среднее $\langle \Delta(\mathbf{r})\,\Delta(\mathbf{r}') \rangle$ зависит лишь от разности $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$]. Совершив обратное преобразование Фурье, находим выражение для корреляционной функции

$$\langle \Delta(0)\,\Delta(\mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{k_BT}{2(A + Ck^2)}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d\mathbf{k} = \frac{k_BT}{8\pi CR}\, e^{-qR},$$

где $q^2 = -A/C > 0$. Для чистого металла $C \sim N(0)\,\xi_0^2$, поэтому отношение

$$\frac{\langle \Delta(0)\,\Delta(\mathbf{R}) \rangle}{(k_BT_c)^2} \sim \frac{k_BT}{E_F}\,\frac{1}{k_FR}\, e^{-qR}.$$

---

[1]) Как показывают недавно выполненные эксперименты и теоретические расчеты, выражение вида (6.6) для F имеет ограниченную применимость в случае магнитных материалов, для которых реальная зависимость носит более сложный характер. Однако для сверхпроводников выражение (6.6) превосходно оправдывается. Усложнения, возникающие в магнитном случае связаны главным образом с так называемыми эффектами ближнего порядка В случае сверхпроводников эти эффекты очень малы (см. задачу).

т. е. очень мало. Этим доказывается сделанное утверждение о малости эффектов ближнего порядка в большинстве сверхпроводников.

в) Для описания эффектов, связанных с магнитным полем $\mathbf{h}$, введем в выражение (6.6) вектор-потенциал $\mathbf{A}$ ($\mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$). При этом свободная энергия не должна зависеть от выбора калибровки $\mathbf{A}$. (Действительно, поскольку замена $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ не приводит к изменению магнитного поля $\mathbf{h}$, должна оставаться неизменной и свободная энергия F.) В гл. V мы нашли, что потенциал спаривания при градиентном преобразовании изменяется по закону

$$\Delta'(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})\, e^{2ie\chi(\mathbf{r})/\hbar c}.$$

Поэтому для обеспечения инвариантности F мы должны заменить разложение (6.6) следующим:

$$F = F_n + A|\Delta|^2 + \frac{B}{2}|\Delta|^4 + C\left|\left(-i\nabla - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\Delta\right|^2 + \frac{h^2}{8\pi}. \quad (6.7)$$

Последний член $h^2/8\pi$ представляет энергию магнитного поля в пустоте. Имеется формальная аналогия между членами порядка $|\Delta|^2$ в разложении (6.7) и выражением для плотности энергии частицы с зарядом $2e$, описывающейся волновой функцией $\psi(\mathbf{r})$. Действительно, положим

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{(2mC)^{1/2}}{\hbar}\Delta(\mathbf{r}),$$
$$\alpha = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{A}{C}, \quad \beta = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \frac{B}{C^2}, \quad -\frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{H_c^2}{8\pi}; \quad (6.8)$$

тогда

$$F = F_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m}\left|\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi\right|^2 + \frac{h^2}{8\pi}. \quad (6.9)$$

Выражение (6.9) для свободной энергии было предложено Гинзбургом и Ландау [98] в 1950 г., т. е. значительно раньше, чем началось развитие микроскопической теории. В то время физический смысл волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ был далеко не ясен; более того, величина заряда e^*, входящего в комбинацию $-i\hbar\nabla - (e^*/c)\mathbf{A}$, оставалась неизвестной (первоначально Гинзбург и Ландау взяли $e^* = e$). Построение выражения (6.9), не зависящего от выбора конкретной модели сверхпроводящего состояния, явилось настоящим триумфом физической интуиции.

Отметим, что выбор массы свободного электрона m в качестве множителя в выражениях (6.8) и (6.9) сделан совершенно произвольно — с равным успехом мы могли бы взять массу Солнца[1]).

[1]) В работах некоторых авторов вместо массы m используется удвоенная масса $2m$. Наша нормировка отвечает оригинальной работе Гинзбурга и Ландау [98].

Напротив, наличие заряда $2e$ в слагаемом $(2e/c)\mathbf{A}$ не является условным, но выражает тот фундаментальный факт, что потенциал спаривания представляет собой результат усреднения произведения двух операторов уничтожения $\Delta = V\langle\Psi(\mathbf{r}\uparrow)\Psi(\mathbf{r}\downarrow)\rangle$.

§ 3. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Теперь наша задача состоит в минимизации свободной энергии, во-первых, относительно параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$ и, во-вторых, относительно распределения магнитного поля, т. е. $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Положим

$$\mathscr{F} = \int F\, d\mathbf{r},$$

где интеграл берется по объему образца. При изменении функций $\psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ соответственно на $\delta\psi(\mathbf{r})$ и $\delta\mathbf{A}(\mathbf{r})$ приращение свободной энергии после интегрирования по частям примет вид

$$\delta\mathscr{F} = \int d\mathbf{r}\left\{\delta\psi^*\left[\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi\right] + \right.$$
$$\left. + \text{Компл. сопр.}\right\} + \int d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{A}\cdot\left\{-\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{h} - \right.$$
$$\left. - \frac{e}{mc}\left[\psi^*\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi + \text{Компл. сопр.}\right]\right\}. \qquad (6.10)$$

Заметим, что слагаемое $(1/4\pi)\operatorname{rot}\mathbf{h}$ под знаком второго интеграла, согласно уравнениям Максвелла, равно $\mathbf{j}/c$, где $\mathbf{j}$ — плотность тока. Положив $\delta\mathscr{F} = 0$, находим

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi = 0, \qquad (6.11)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{ie\hbar}{m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{4e^2}{mc}|\psi|^2\mathbf{A}. \qquad (6.12)$$

Система уравнений (6.11) и (6.12) (совместно с уравнениями Максвелла. — *Ред.*) представляет собой фундаментальную систему уравнений Гинзбурга — Ландау, позволяющую определить, во-первых, параметр порядка и, во-вторых, токи, т. е. диамагнитный отклик сверхпроводника.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Выражение (6.12) формально совпадает с выражением для плотности тока, создаваемого частицей с зарядом $2e$, массой m в состоянии с волновой функцией $\psi(\mathbf{r})$.

2. При выводе выражения (6.10) мы опустили поверхностный интеграл

$$\frac{i\hbar}{2m}\int \delta\psi^*\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \text{Компл. сопр.}$$

Сохранив этот член и потребовав, чтобы он был равен нулю, получим следующее граничное условие:

$$\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathrm{A}\right)_n \psi = 0. \tag{6.13}$$

где индекс n обозначает компоненту вектора, нормальную к поверхности образца. Гинзбург и Ландау в их оригинальной работе шли именно этим путем. При этом неявно предполагалось, что выражение (6.9) для плотности свободной энергии справедливо даже в непосредственной близости к поверхности. В дальнейшем, исходя из микроскопической теории, мы увидим, что для границы сверхпроводник — изолятор условие (6.13) выполняется; наоборот, для границы сверхпроводник — нормальный металл в это граничное условие необходимо внести принципиальные изменения.

При подстановке условия (6.13) в выражение для плотности тока (6.12) легко видеть, что $\mathbf{j}_n = 0$, т. е. втекающие или вытекающие из сверхпроводника токи отсутствуют. Если же, наоборот, потребовать выполнения условия $\mathbf{j}_n = 0$, то вместо (6.13) мы получим более слабое условие

$$\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathrm{A}\right)_n \psi = i\lambda\psi,$$

где λ — произвольная вещественная постоянная. На практике такого типа граничное условие встречается при рассмотрении контакта сверхпроводника с нормальным металлом.

§ 4. ДВЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ДЛИНЫ

Уравнения Гинзбурга — Ландау (6.11) и (6.12) содержат две характерные длины, к обсуждению которых мы сейчас и перейдем.

а) Сначала рассмотрим случай, когда магнитные поля и токи отсутствуют. Выберем калибровку, в которой функция ψ вещественна, и для простоты ограничимся одномерным случаем. Тогда уравнение (6.11) заметно упрощается

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0. \tag{6.14}$$

Это уравнение имеет два очевидных решения: 1) решение $\psi = 0$, относящееся к нормальному состоянию, и 2) решение $\psi = \psi_0$, где

$$\psi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} > 0, \tag{6.15}$$

описывающее обычное сверхпроводящее состояние. Второе решение существует и отвечает более низкой энергии, когда $\alpha < 0$, т. е. когда $T < T_c$. Однако мы хотели бы рассмотреть также решения более общего вида, например, для случаев, когда под действием какого-либо внешнего фактора параметр порядка $\psi(x)$ в некоторой точке имеет значение, отличное от ψ_0. Возникает вопрос, как ведет себя $\psi(x)$ в окрестности этой точки?

Чтобы найти характерную длину в уравнении (6.14), целесообразно перейти к приведенным переменным

$$\psi = \psi_0 f, \tag{6.16}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} = \xi^2(T), \tag{6.17}$$

где параметр $\xi(T)$ имеет размерность длины. В этих переменных уравнение (6.14) принимает вид

$$-\xi^2(T)\frac{d^2f}{dx^2} - f + f^3 = 0. \tag{6.18}$$

Отсюда следует, что параметр $\xi(T)$ является естественной единицей для измерения расстояний, на которых может меняться функция f. Мы будем называть его *длиной когерентности при данной температуре* T. Чтобы оценить порядок величины $\xi(T)$, заметим, что, согласно (6.8),

$$\xi^2(T) = -\frac{C}{A}.$$

Ранее уже отмечалось, что для чистого *металла*

$$A \approx -\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)N(0),$$

$$C \approx N(0)\,\xi_0^2.$$

Используя числовые значения коэффициентов, получаем

$$\xi(T) = 0{,}74\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}\xi_0. \tag{6.19}$$

Характерная длина для изменений ψ есть $\xi(T)$, поэтому очевидно, что для температур T, близких к T_c, параметр порядка мало меняется на расстояниях порядка ξ_0.

Задача. Вычислить энергию NS-границы для сверхпроводника первого рода (фиг. 50) в предельном случае, когда глубиной проникновения поля можно полностью пренебречь.

Решение. По предположению, поле не проникает в область, в которой параметр порядка ψ отличен от нуля. Следовательно, для нахождения ψ можно использовать уравнение (6.18) со следующими граничными условиями:

$$f = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$f \to 1 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Умножая обе части уравнения (6.18) на df/dx и интегрируя, находим первый интеграл

$$-\xi^2(T)\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - f^2 + \frac{1}{2}f^4 = \text{const}.$$

Чтобы удовлетворить граничному условию на бесконечности, константу необходимо положить равной $-1/2$. Это дает

$$\xi^2(T)\left(\frac{df}{dx}\right)^2=\frac{1}{2}(1-f^2)^2.$$

Это уравнение имеет решение

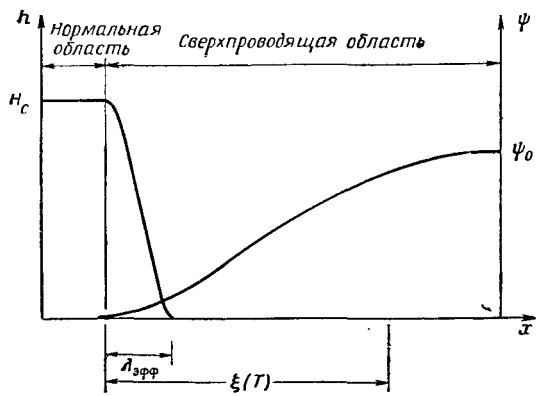
$$f=\operatorname{th}\left[\frac{x}{\sqrt{2}\,\xi(T)}\right],$$

которое удовлетворяет нашим граничным условиям при $x=0$.

Энергия, отнесенная к единице площади границы, равна

$$F_p=\int_0^\infty dx\left(\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2+\alpha|\psi|^2+\frac{1}{2}\beta|\psi|^4\right).$$

Поверхностная энергия $\left(H_c^2/8\pi\right)\delta$ представляет собой разность между F_p и энергией конденсации, которую мы получили бы, если все полупространство



Фиг. 50. Пространственное изменение магнитного поля и параметра порядка вблизи NS-границы для сверхпроводника первого рода [$\xi(T)\gg\lambda(T)$].

Эффективная глубина проникновения $\lambda_{эфф}$ имеет порядок $\sqrt{\lambda\xi}$ (см. задачу на стр. 233).

$x\geqslant 0$ было заполнено однородным ($\psi=\psi_0$) сверхпроводником. Таким образом,

$$\frac{H_c^2}{8\pi}\delta=F_p-\int_0^\infty\frac{H_c^2}{8\pi}dx.$$

Подставляя сюда найденное выражение для приведенного параметра f и используя соотношения (6.8) и (6.17), находим

$$\delta=\int_0^\infty dx\left[2\xi^2(T)\left(\frac{df}{dx}\right)^2+(1-f^2)^2\right].$$

С помощью первого интеграла для df/dx величину δ можно представить в следующем виде:

$$\delta = 2\int_0^\infty dx\,(1-f^2)^2 = 2\int_0^1 (1-f^2)^2\,\frac{dx}{df}\,df =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\xi(T)\int_0^1 (1-f^2)\,df = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\xi(T) = 1{,}89\,\xi(T).$$

б) Вторая характерная длина появляется, когда мы переходим к рассмотрению электромагнитных эффектов, например при вычислении глубины проникновения слабого магнитного поля. Предположим, что сверхпроводник занимает полупространство $z \geqslant 0$, а область $z < 0$ или пуста, или заполнена диэлектриком; в обоих случаях применимо граничное условие (6.13).

В случае слабого поля в первом порядке по $\mathbf{h}$ параметр $|\psi|^2$ в области $z \geqslant 0$ можно заменить его равновесным значением $|\psi_0|^2$ в отсутствие поля [см. (6.15)]. Возьмем ротор от обеих сторон уравнения (6.12); тогда мы придем к уравнению лондоновского типа

$$\operatorname{rot}\mathbf{j} = -\frac{4e^2}{mc}\,\psi_0^2\mathbf{h}, \tag{6.20}$$

поскольку величина ψ_0 не зависит от координат. Решая (6.20) вместе с уравнениями Максвелла, мы получаем, как и в гл. II, решение лишь в том случае, когда вектор $\mathbf{h}$ лежит в плоскости xy. Выберем ось x в направлении $\mathbf{h}$; тогда

$$h_x = h_x(0)\,e^{-z/\lambda(T)}, \tag{6.21}$$

$$\lambda^{-2}(T) = \frac{16\pi e^2\psi_0^2}{mc^2}, \tag{6.22а}$$

или

$$\lambda^{-2}(T) = \frac{32\pi e^2}{\hbar^2 c^2}\,C\Delta_0^2, \tag{6.22б}$$

где Δ_0 — равновесное значение потенциала спаривания. С помощью (6.22б) можно связать коэффициент C с величинами, непосредственно измеряемыми на опыте [1]). Отметим, что глубина $\lambda(T)$ пропорциональна ψ_0^{-1}, т. е. $(1-T/T_c)^{-1/2}$. Для чистого металла в приближении свободных электронов микроскопическая теория БКШ дает

$$\lambda(T) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}\lambda_L(0) \qquad (T \to T_c), \tag{6.23}$$

[1]) В кристаллах, не обладающих кубической симметрией, необходимо учитывать тензорный характер коэффициента C.

где $\lambda_L(0)$ — лондоновская глубина проникновения при абсолютном нуле

$$\lambda_L^{-2}(0) = \frac{4\pi n e^2}{mc^2}$$

(n — число электронов в 1 $см^3$). Выражение (6.23) с точностью до численного коэффициента можно получить также с помощью (6.22), если принять

$$C \approx N(0)\,\xi_0^2,$$

$$\Delta_0^2 \approx k_B^2 T_c\,(T_c - T).$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Исходя из предположений Гинзбурга и Ландау, в частности используя выражение (6.7) для свободной энергии при наличии поля, мы нашли локальную связь (6.12) между током и вектором-потенциалом. С другой стороны, из микроскопического рассмотрения, приведенного в гл. V, следует, что в частном случае, когда параметр $|\Delta|$ постоянен и поле $\mathbf{h}$ мало, точная связь носит нелокальный характер, т. е. для чистого металла плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в данной точке $\mathbf{r}$ зависит от значений вектора-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$, где $\mathbf{r}'$ лежит в области $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \lesssim \xi_0$. Для выполнимости локального приближения необходимо потребовать, чтобы плотность тока или вектор-потенциал $\mathbf{A}$ медленно изменялись на расстояниях порядка ξ_0, т. е.

$$\begin{aligned} \lambda(T) &\gg \xi_0, \\ \lambda_L(0)\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} &\gg \xi_0. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Для чистого металла это соответствует температурам, достаточно близким к T_c. Однако для некоторых непереходных металлов, в особенности для Al, лондоновская глубина $\lambda_L(0)$ настолько мала по сравнению с ξ_0, что температурный интервал, необходимый для выполнения условия (6.24), оказывается очень узким.

в) Выше мы нашли две характерные длины $\xi(T)$ и $\lambda(T)$, определяющие поведение сверхпроводника вблизи критической температуры. Обе величины расходятся как $(T_c - T)^{-1/2}$ при $T \to T_c$, поэтому представляет особый интерес их отношение

$$\varkappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}. \tag{6.25}$$

Используя определения (6.17) и (6.22а) величин $\xi(T)$ и $\lambda(T)$, получаем

$$\varkappa = \frac{mc}{2e\hbar}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{1/2} = \frac{\hbar c}{4eC}\left(\frac{B}{2\pi}\right)^{1/2}. \tag{6.26}$$

Отношение $\varkappa$ носит название *параметра Гинзбурга — Ландау* для данного вещества. В зависимости от величины параметра $\varkappa$ сверхпроводники делятся на два типа: значения $\varkappa \lesssim 1$ ($\lambda < \xi$) отвечают сверхпроводникам первого рода; значения $\varkappa \gtrsim 1$ ($\lambda > \xi$) соответствуют сверхпроводникам второго рода. Позже мы увидим, что точно граница соответствует значению $\varkappa = 1/\sqrt{2}$. Мы покажем также, что для чистого вещества

$$\varkappa = 0{,}96 \frac{\lambda_L(0)}{\xi_0}. \tag{6.27}$$

Обратим внимание на тот интересный факт, что параметр $\varkappa$ можно определить непосредственно из экспериментальных данных о глубине проникновения и величине поля H_c, полученных в области применимости уравнений Гинзбурга — Ландау. Действительно, с помощью (6.22а), (6.15) и (6.8) выражение (6.26) легко преобразовать к виду

$$\varkappa = \frac{2\sqrt{2}e}{\hbar c} H_c(T) \lambda^2(T). \tag{6.28}$$

Выражение (6.28) иногда записывают в другой форме, которая часто бывает полезна при численных расчетах

$$H_c(T) = \frac{\phi_0}{2\pi\sqrt{2}\,\xi(T)\lambda(T)}, \tag{6.29}$$

где $\phi_0 = ch/2e$ — квант потока.

В настоящей главе мы обсудим также другие методы определения величины $\varkappa$.

§ 5. ЗАДАЧИ С ПОСТОЯННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ АМПЛИТУДЫ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА $|\psi|$

Применим теперь уравнения Гинзбурга — Ландау для решения некоторых конкретных задач. Сначала рассмотрим особенно простой случай, когда амплитуда $|\psi|$ параметра порядка постоянна во всех точках образца. С такой ситуацией мы уже однажды сталкивались при вычислении глубины проникновения слабого магнитного поля в массивный образец. Рассмотрим сейчас случаи совершенно иного рода. Речь пойдет о тонких образцах (пленки, проволочки и т. п.), в которых всякое изменение функции ψ по толщине энергетически невыгодно, поскольку оно привело бы к резкому вырастанию члена $|\nabla\psi|^2$ в выражении для свободной энергии. При этом поле $\mathbf{h}$ или ток $\mathbf{j}$ не предполагаются слабыми, поэтому амплитуда $|\psi|$ (оставаясь постоянной) не обязательно должна быть равна своему невозмущенному значению ψ_0.

Критический ток в тонкой пленке [99]

Пусть по пленке толщиной d течет ток с плотностью $\mathbf{j}$, направленной вдоль оси x, как показано на фиг. 51. Предположим, что выполняются следующие неравенства: $d \ll \xi(T)$ и $d \ll \lambda(T)$. Первое из них обеспечивает постоянство по толщине пленки амплитуды $|\psi|$, а второе — постоянство плотности тока $\mathbf{j}$[1]). При выполнении написанных условий исходные уравнения значительно упрощаются. Действительно, положим

$$\psi = |\psi| e^{i\varphi(\mathbf{r})},$$

где амплитуда $|\psi|$ не зависит от $\mathbf{r}$. Тогда выражение для плотности тока можно написать в виде

$$j = \frac{2e}{m}|\psi|^2\left(\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{2e}{c}A_x\right) = 2e|\psi|^2 v, \tag{6.30}$$

где

$$v = \frac{1}{m}\left(\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{2e}{c}A_x\right); \tag{6.31}$$

величина v представляет собой скорость „частиц“ в состоянии с волновой функцией ψ. Плотность свободной энергии (6.9) также принимает простой вид

$$F = F_n + |\psi|^2\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta|\psi|^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{h^2}{8\pi}. \tag{6.32}$$

Имея в виду упомянутую аналогию, мы записали третий член выражения, стоящего в скобках, в форме кинетической энергии для частицы. Условие минимума F относительно $|\psi|$ дает

$$\alpha + \beta|\psi|^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0. \tag{6.33}$$

Полагая, как прежде, $|\psi| = \psi_0 f$, где $\psi_0^2 = -\alpha/\beta$, и исключая из (6.30) и (6.33) скорость v, находим

$$j = 2e\psi_0^2\left(\frac{2|\alpha|}{m}\right)^{1/2} f^2(1-f^2)^{1/2}, \tag{6.34}$$

$$j = 2e\psi_0^2\left[\frac{\hbar}{m\xi(T)}\right] f^2(1-f^2)^{1/2}. \tag{6.35}$$

Связь между j и f показана на фиг. 51, *б*. Отсюда видно, что при возрастании j от нуля функция f убывает от начального значения $f = 1$. Когда плотность тока j становится больше определенного

[1]) Легко убедиться, что условие постоянства амплитуды $|\psi|$ совместимо с граничным условием (6.13).

значения

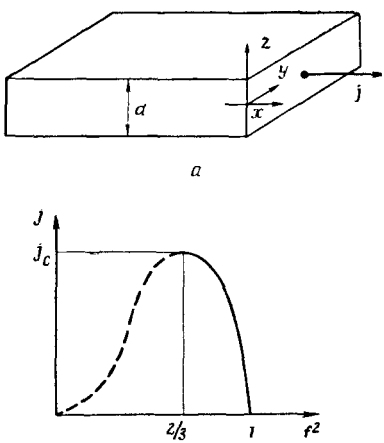
$$j_c = \frac{4e\hbar\psi_0^2}{3\sqrt{3}\, m\xi(T)}, \tag{6.36}$$

решения с $f \neq 0$ отсутствуют вовсе. Таким образом, при $j > j_c$ пленка находится в нормальном состоянии. Легко видеть, что в самой точке перехода при $j = j_c$ параметр f скачком изменяется от значения, равного 0,8, до 0. Величина j_c носит название критической плотности тока для пленки. Выражение (6.36) определяет ее как функцию от ψ_0^2 и $\xi(T)$, т. е. фактически через параметры α и β теории Гинзбурга — Ландау. Для оценок порядка величин иногда бывает удобным ввести в рассмотрение критическую скорость v_c, которая, по определению, отвечает критической плотности тока ($j = j_c$). Из (6.30) и (6.35) видно, что при $j = j_c$ скорость $v = v_c \sim \hbar/m\xi(T)$. Для чистого металла

$$\xi(T) \sim \xi_0\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \sim \sim \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta_0(T)}, \tag{6.37}$$

поэтому

$$v_c \sim \frac{\Delta_0(T)}{m v_F}. \tag{6.38}$$



Фиг. 51. Определение критического тока тонкой пленки толщиной d.

a — геометрия системы; $б$ — соотношение между параметром порядка f и плотностью протекающего тока j (величины нормированы соответственно на значение параметра порядка в отсутствие тока и на величину критической плотности тока j_c). При $j > j_c$ параметр порядка скачком обращается в нуль.

Интересно сравнить значение (6.38) с максимальной величиной скорости, связанной с мейсснеровскими токами в массивных сверхпроводниках. Во внешнем поле H ток вблизи поверхности составляет $\sim cH/\lambda$; соответственно скорость v равна

$$v \sim \frac{j}{2e\psi_0^2} \sim \frac{cH}{2\lambda\psi_0^2}, \tag{6.39}$$

где λ — глубина проникновения. Последняя дается выражением (6.22а'), если температура достаточно близка к критической. Подставляя сюда максимальное значение поля $H_c = (4\pi/\beta)^{1/2}|\alpha|$ и используя определения

(6.25) и (6.26) параметра $\varkappa$, находим, что для сверхпроводников первого рода наибольшая скорость равна

$$v \sim \frac{\varkappa\hbar}{m\lambda} \sim \frac{\hbar}{m\xi(T)}.$$

По порядку величины этот результат совпадает со значением (6.38). Для сверхпроводников второго рода максимальное поле, вплоть до которого эффект Мейсснера остается полным, равно $H_{c1} \sim H_c/\varkappa$ и, следовательно, $v \sim \hbar/m\lambda(T) \ll \hbar/m\xi(T)$, т. е. в массивных образцах сверхпроводящие токи менее устойчивы, чем в пленках, вследствие возможности образования вихревых нитей.

Поскольку критическая скорость пропорциональна $(T_c - T)^{1/2}$, а критический ток меняется как $\psi_0^2 v_c$, последний пропорционален $(T_c - T)^{3/2}$.

Измерение величины j_c представляет собой очень тонкую экспериментальную процедуру. Особое внимание нужно обратить на следующие моменты.

а) Необходимо обеспечить неизменность распределения магнитного поля вблизи пленки. Обычно это осуществляется с помощью системы экранов, сделанных из другой сверхпроводящей пленки.

б) Переход происходит сначала в каком-то „горячем участке", после чего остальная часть пленки переходит в нормальное состояние за счет чисто тепловых эффектов. Положение вещей можно несколько улучшить, если изготовить подложку пленки из материала с большой теплопроводностью или работать в импульсном режиме.

в) Переход, определяемый по вольтамперным характеристикам, оказывается „размазанным", а не скачкообразным.

Несмотря на эти трудности, результаты ряда тщательно поставленных опытов находятся, по всей видимости, в неплохом согласии с теорией. В качестве примера сошлемся на работу Ньюхауза и Бремера [100], в которой изучались тонкие пленки олова $[\xi_0 \approx 2300\text{Å}$, $d \approx 3000\text{Å}$, $T_c \approx 3 \cdot 10^{-2}\text{°K}$, $\lambda_L(T) \sim d$ и $\xi(T) \gg d]$.

При указанных условиях измеренная плотность тока j_c составляла $\sim 10^4$ $a/см^2$. Зависимость величины $|\psi|$ (или $|\Delta|$) от тока можно в принципе найти с помощью туннельных измерений величины щели. (Детальный расчет показывает, что для данной геометрии щель в спектре возбуждений примерно равна $|\Delta|$.)

Сравнение опытных данных по критическим токам с теорией следует проводить тоже с известной осторожностью. Во-первых, при $\lambda(T) \sim d$ становится существенным изменение плотности тока по толщине пленки. Соответствующий расчет j легко выполнить, поскольку при $|\psi| = \text{const}$ в области применимости уравнений Гинзбурга — Ландау распределение плотности тока описывается простым

лондоновским уравнением. Во-вторых, если, помимо условия $d<\xi(T)$, выполняется также более сильное неравенство $d<\xi(T=0)$, то уравнения Гинзбурга — Ландау вообще становятся неприменимыми (см. задачу на стр. 225).

Эффект Литтла и Паркса [101, 102]

Рассмотрим сверхпроводящую пленку, нанесенную на изолирующую подложку в форме цилиндра радиусом R, как показано на фиг. 52; толщина пленки $d \ll R$ ($d \sim 300 - 1000$Å). Вдоль оси цилиндра приложено однородное магнитное поле H (составляющее обычно по порядку величины несколько десятков гаусс).

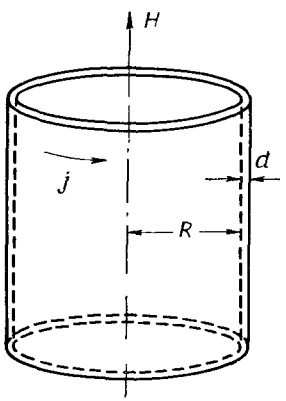
Вычислим температуру сверхпроводящего перехода как функцию приложенного магнитного поля. Излагаемый ниже метод расчета, основанный на уравнениях Гинзбурга — Ландау, принадлежит Тинкхаму [103, 104][1]). Попрежнему будем считать, что $d \ll \xi(T)$, $d \ll \lambda(T)$, а амплитуда $|\psi|$ постоянна внутри пленки. Как обычно, положим

$$\psi = |\psi| e^{i\theta(\mathbf{r})},$$

свободная энергия дается прежним выражением (6.32).

Если составляющая тока вдоль оси цилиндра равна нулю, то скорость $\mathbf{v}$ — тангенциальный вектор постоянной длины. В предыдущем случае, когда ток в пленке был фиксирован, скорость $\mathbf{v}$ была связана с плотностью тока равенством

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{2e|\psi|^2}.$$



Фиг. 52. Схема опыта Литтла и Паркса.

Измерялась температура сверхпроводящего перехода тонкой цилиндрической пленки толщиной d, нанесенной на цилиндр радиусом $R \gg d$, в аксиальном поле H.

В рассматриваемом случае задано внешнее магнитное поле H. Чтобы связать его с величиной скорости v, рассмотрим циркуляцию $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$, где интегрирование ведется по окружности цилиндра радиусом R. Имеем

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R v = \frac{\hbar}{m}[\theta] - \frac{2e}{mc}\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \qquad (6.40)$$

где $[\theta]$ — изменение фазы при полном обходе вокруг цилиндра. Функция $\psi(\mathbf{r})$, будучи пропорциональной самосогласованному полю

[1]) Теоретически этот вопрос в рамках уравнения Гинзбурга — Ландау рассматривался Гинзбургом [105] в 1962 г. — *Прим. ред.*

$\Delta(\mathbf{r})$, должна быть однозначной (см. гл. V), т. е. $[\theta] = 2\pi n$, где n — любое целое число. Второй член в выражении (6.40) пропорционален интегралу

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \phi = \pi R^2 H, \tag{6.41}$$

т. е. магнитному потоку, заключенному внутри цилиндра. Следовательно,

$$v = \frac{\hbar}{mR}\left(n - \frac{\phi}{\phi_0}\right), \tag{6.42}$$

где $\phi_0 = hc/2e$ — квант потока.

При фиксированном поле H поток ϕ также фиксирован, а скорость v, согласно (6.42), может иметь бесконечный ряд дискретных значений. Однако из (6.32) следует, что свободная энергия имеет минимум лишь при таком значении n, при котором величина скорости $|v|$ минимальна. Таким образом,

$$v = \min\left(\frac{\hbar}{mR}\left|n - \frac{\phi}{\phi_0}\right|\right), \tag{6.43}$$

т. е. v является периодической функцией поля H с периодом $\phi_0/\pi R^2$ (значению $R = 7 \cdot 10^3$Å соответствует $\phi_0/\pi R^2 \approx 14$ *гс*). Зная скорость v, мы можем найти минимум свободной энергии относительно $|\psi|$. Это дает

$$|\psi|^2 = \beta^{-1}\left(-\alpha - \frac{mv^2}{2}\right). \tag{6.44}$$

Очевидно, решение существует лишь при выполнении условия $-\alpha > mv^2/2$. Температура перехода T_H определяется условием $-\alpha(T_H) = mv^2/2$, т. е. T_H — периодическая функция поля H. Поскольку $\alpha \sim (T - T_c)$, окончательно можно заключить, что теоретическая кривая T_H состоит из ряда параболических дуг. Наибольшее смещение температуры перехода имеет место при

$$v = \frac{\hbar}{2mR},$$

$$-\alpha(T_H) = \frac{\hbar^2}{2m\xi^2(T_H)} = \frac{m}{2}\left(\frac{\hbar}{2mR}\right)^2, \tag{6.45}$$

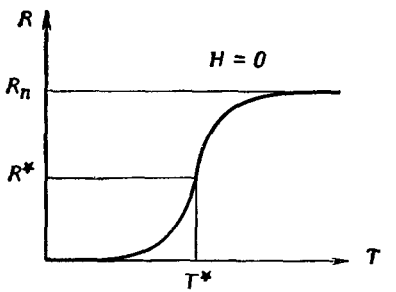
$$\xi(T_H) = 2R.$$

Для пленки чистого вещества (толщиной $d > \xi_0$), используя ранее найденную зависимость $\xi(T) = 0{,}74\xi_0(1 - T/T_c)^{-1/2}$, получаем

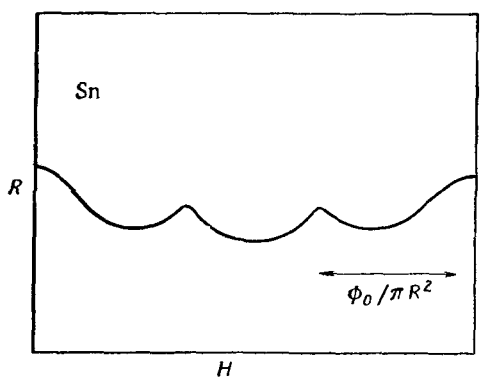
$$(T_c - T_H)_{\text{макс}} = 0{,}55T_c\left(\frac{\xi_0}{2R}\right)^2. \tag{6.46}$$

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Из (6.45) следует, что условия $d \ll \xi(T)$ и $d \ll \lambda(T)$ фактически выполняются, если $d \ll 2R$, $d \ll 2R\varkappa$.



а



б

Фиг. 53. Результаты опыта Литтла и Паркса [102].

а — температурная зависимость сопротивления R в нулевом поле при $T^* \approx T_c$; *б* — «квантовый гребешок» (осцилляции сопротивления как функции поля) при заданной температуре $T^* \approx T_c$. Период осцилляций соответствует проникновению в цилиндр одного кванта потока и равен $\Delta H = \Phi_0/\pi R^2$ (R — радиус пленки). Параболический «фон», по-видимому, объясняется неточной ориентацией поля.

2. Практически часто используются пленки, для которых $d < \xi_0$. В этом случае (6.46) заменяется следующим выражением:

$$(T_c - T_H)_{\text{макс}} \sim T_c \frac{\xi_0 d}{(2R)^2}.$$

Доказательство этого результата будет дано позднее (см. задачу на стр. 225).

3. Описываемые явления были обнаружены в опыте Литтла и Паркса [101, 102] на тонких пленках. Очевидно, что для получения измеримой величины смещения $T_c - T_H$ радиус R должен быть по возможности малым.

Выше уже отмечалось, что значение R обычно составляет приблизительно 0,7 *мк* (пленка наносится на тонкую синтетическую нить), а $d \sim 350$Å. Сопротивление измеряется путем пропускания тока вдоль оси цилиндра. Желательно, чтобы ток был как можно слабее.

В отсутствие поля зависимость сопротивления $R(H=0, T)$ от температуры имеет вид, показанный на фиг. 53; ширина области, в которой осуществляется переход, составляет примерно 0,05° К.

В экспериментах выбиралась температура T^*, лежащая в области перехода. Затем измерялась зависимость сопротивления $R(H, T^*)$ от поля. Результирующая кривая (фиг. 53, *б*) для цилиндра радиусом $R = 0{,}7$ *мк* осциллирует с периодом, равным 14 *гс*. Из этих данных можно непосредственно определить величину кванта потока ϕ_0. Наоборот, вопрос относительно амплитуды осцилляций $R(H)$ до конца не выяснен, поскольку недостаточно изучены механизмы диссипативных процессов, происходящих в области перехода. [Установлено, в частности, что при наложении поля H кривая $R(T)$ не только сдвигается вдоль температурной оси, но и деформируется.]

Как видно из фиг. 53, *б*, на осцилляции накладывается монотонное увеличение сопротивления, квадратичное по H, которое связано с диамагнетизмом образца. Выше предполагалось, что поле H строго параллельно оси цилиндра и $d \ll \lambda(T)$. В этих условиях поле h не меняется по толщине пленки и силовые линии почти не смещаются при переходе образца из нормального в сверхпроводящее состояние, т. е. диамагнетизмом последнего можно пренебречь. Сказанное несправедливо в случае, когда поле направлено под углом к оси цилиндра. Это обстоятельство приводит к заметному искажению силовых линий при сверхпроводящем переходе и к появлению в выражении для энергии члена, пропорционального H^2, ответственного за наблюдаемое поведение сопротивления. (Экспериментально установлено, что этот эффект очень чувствителен к ориентации цилиндра.)

Пластина в параллельном поле

Рассмотрим пластину толщиной $d < \xi(T)$ в параллельном ее плоскости поле H, имеющем равные значения на обеих границах, т. е. при $z = \pm d/2$. Таким образом, в отличие от предыдущего случая здесь мы с самого начала предполагаем, что результирующий ток в пластине отсутствует. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай, когда поле $\mathbf{h}$ направлено вдоль оси y, а ток $\mathbf{j}$ — вдоль оси x. Тогда из уравнения Максвелла

$$\frac{\partial h(z)}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j$$

следует, что

$$0 = h\left(\frac{d}{2}\right) - h\left(-\frac{d}{2}\right) = -\frac{4\pi}{c}\int_{-d/2}^{d/2} j\,dz, \tag{6.47}$$

т. е. в среднем токи в пластине взаимно компенсируются.

Рассмотрим подробнее распределение токов. Сначала обсудим частный случай $|\psi| = \text{const}$. Тогда, как мы уже видели, уравнение Гинзбурга — Ландау сводится к уравнению Лондонов. Запишем по-

следнее в виде

$$\frac{\partial j}{\partial z} = -\frac{4e^2}{mc} |\psi|^2 h. \tag{6.48}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{f^2 h}{\lambda^2(T)} \tag{6.49}$$

(как обычно, $f = |\psi|/\psi_0$). Решая это уравнение с граничным условием $h(\pm d/2) = H$, находим

$$h = H \frac{\operatorname{ch}[zf/\lambda(T)]}{\operatorname{ch}(\tilde{\varepsilon} f/2)}, \tag{6.50}$$

где $\tilde{\varepsilon} = d/\lambda(T)$. Подставляя выражение для h в (6.47) или (6.48), можно найти плотность тока j. Для дальнейших вычислений удобно ввести, как обычно, дрейфовую скорость электронов

$$v = \frac{j}{2e|\psi|^2} = \frac{2e\lambda(T)H}{mcf} \frac{\operatorname{sh}[zf/\lambda(T)]}{\operatorname{ch}(\tilde{\varepsilon} f/2)}. \tag{6.51}$$

Зная скорость v, мы можем с помощью соотношения (6.32) вычислить свободную энергию. Найдем усредненное (по толщине пластины) значение кинетической энергии

$$\overline{v^2} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} v^2 dz = \frac{1}{2} \left[\frac{2e\lambda(T)H}{mcf \operatorname{ch}(\tilde{\varepsilon} f/2)}\right]^2 \left(\frac{\operatorname{sh} \tilde{\varepsilon} f}{\tilde{\varepsilon} f} - 1\right). \tag{6.52}$$

Минимизируя выражение (6.32) относительно f, находим

$$f^2 = 1 + \frac{m\overline{v^2}}{2\alpha}. \tag{6.53}$$

С помощью основных соотношений (6.8), (6.15) и (6.22) полученный результат представим в виде

$$\left(\frac{H}{H_c}\right)^2 = 4f^2(1 - f^2) \frac{\operatorname{ch}^2(\tilde{\varepsilon} f/2)}{(\operatorname{sh} \tilde{\varepsilon} f/\tilde{\varepsilon} f) - 1}. \tag{6.54}$$

Согласно (6.54), величина f убывает с ростом H. В области $\tilde{\varepsilon} f \ll 1$ зависимость имеет вид

$$\left(\frac{H}{H_c}\right)^2 = \frac{24}{\tilde{\varepsilon}^2}(1 - f^2), \quad d \ll \frac{\lambda(T)}{f}. \tag{6.55}$$

При $\tilde{\varepsilon} \gg 1$ (позже мы увидим, что в интересующей нас области f близко к единице) соотношение (6.54) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{H}{H_c}\right)^2 = 2\tilde{\varepsilon}(1 - f^2), \quad d \gg \lambda(T). \tag{6.56}$$

Найдем теперь критическое поле пленки, т. е. максимальное допустимое значение H. В том случае, когда переход в нормальное

состояние осуществляется путем фазового перехода первого рода, мы должны для этого вычислить и сравнить значения потенциала Гиббса G (при фиксированных значениях H и T) в сверхпроводящей и нормальной фазах. Вычислим сначала с помощью (6.32) и (6.52) плотность свободной энергии F_s в сверхпроводящей фазе. Используя затем условие равновесия (6.53) и соотношения (6.8) и (6.15), представим ее в виде

$$F_s = F_n - \frac{H_c^2}{8\pi} f^4 + \frac{\overline{h^2}}{8\pi}, \tag{6.57}$$

где

$$\overline{h^2} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} h^2\, dz = H^2 \frac{\tilde{\varepsilon} f + \operatorname{sh} \tilde{\varepsilon} f}{\tilde{\varepsilon} f\,(1 + \operatorname{ch} \tilde{\varepsilon} f)}, \tag{6.58}$$

а величина f дается выражением (6.54). Нам также понадобится выражение для индукции B, которое легко получить, усредняя выражение (6.50) для поля h:

$$B = H \frac{2 \operatorname{th} (\tilde{\varepsilon} f/2)}{\tilde{\varepsilon} f}. \tag{6.59а}$$

Читатель может легко проверить, что $dF/dB = H/4\pi$. Поэтому поле H является равновесным полем — результат, который можно предсказать сразу, исходя из приведенного в гл. II общего рассмотрения. Построим, наконец, потенциал Гиббса

$$G_s = F_s - \frac{BH}{4\pi} = F_n + \frac{H^2}{8\pi}\left[\frac{\operatorname{sh} \tilde{\varepsilon} f + \tilde{\varepsilon} f}{\tilde{\varepsilon} f\,(1 + \operatorname{ch} \tilde{\varepsilon} f)} - \frac{4 \operatorname{th} (\tilde{\varepsilon} f/2)}{\tilde{\varepsilon} f}\right] - \frac{H_c^2}{8\pi} f^4. \tag{6.59б}$$

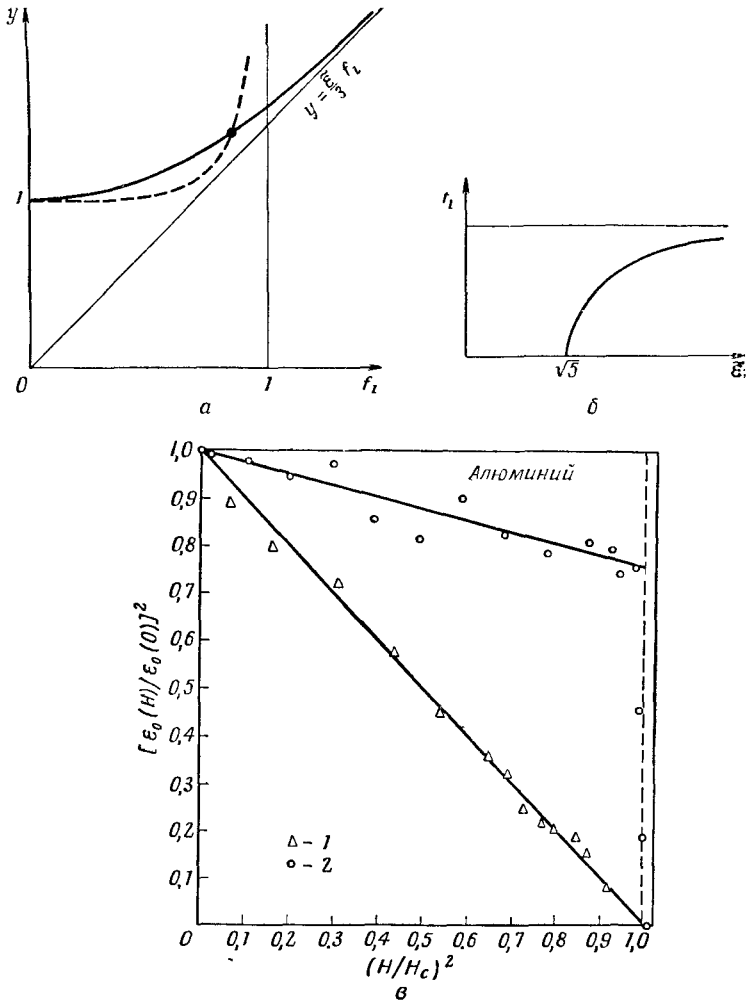
В нормальной фазе $G_n = F_n - H^2/8\pi$. Чтобы найти критическое поле H_l, положим $G_n = G_s$, или, в явном виде,

$$\left(\frac{H_l}{H_c}\right)^2 \left[1 + \frac{\tilde{\varepsilon} f_l + \operatorname{sh} \tilde{\varepsilon} f_l}{\tilde{\varepsilon} f_l\,(1 + \operatorname{ch} \tilde{\varepsilon} f_l)} - \frac{4 \operatorname{th} (\tilde{\varepsilon} f_l/2)}{\tilde{\varepsilon} f_l}\right] = f_l^4. \tag{6.60}$$

Решая совместно уравнения (6.54) и (6.60), мы сможем определить поле H_l и соответствующее ему значение параметра порядка $\psi_l = \psi_0 f_l$. Исключая H_l из этих уравнений, находим

$$1 + \frac{1}{6}\frac{f_l^2}{1 - f_l^2} = \frac{1}{3}\frac{\tilde{\varepsilon} f_l\,(\operatorname{ch} \tilde{\varepsilon} f_l - 1)}{\operatorname{sh} (\tilde{\varepsilon} f_l) - \tilde{\varepsilon} f_l}. \tag{6.61}$$

На фиг. 54, *а* отложены обе стороны уравнения (6.61) в зависимости от f_l. При $f_l \to 0$ левая часть изменяется как $1 + f_l^2/6$, а правая — как $1 + (\tilde{\varepsilon} f_l/30)^2$, т. е. для $\tilde{\varepsilon} > \sqrt{5}$ правая часть растет быстрее левой. При $f_l = 1$ левая часть расходится. Поэтому для $\tilde{\varepsilon} > \sqrt{5}$



Фиг. 54. Поведение пленки в параллельном магнитном поле.

а — графнк левой (пунктир) и правой (сплошная кривая) сторон уравнения (6.61) в зависнмости от иормнрованного параметра порядка f_l. Показаи случай, когда имеет место пересечение кривых [$d > \sqrt{5}\lambda(T)$].

б — завнсимость параметра порядка f_l от отношения $\tilde{\varepsilon} = d/\lambda(T)$ при $\tilde{\varepsilon} > \sqrt{5}$ (переход первого рода); при $\tilde{\varepsilon} < \sqrt{5}$ имеет место фазовый переход второго рода ($f_l \equiv 0$).

в — зависимость энергетической щели в алюминии от магнитного поля, полученная Дугласом [109] на основе туннельиых измереиий на двух образцах: $d \approx 3000$ Å, $T = 0{,}745\,T_c$, $d/\lambda = 1{,}9$ (образец *1*) и $d \approx 4000$ Å, $T = 0{,}774\,T_c$, $d/\lambda = 3{,}5$ (образец *2*). Для более тонкой пленки скачок практически не заметен.

в области между $f_l = 0$ и $f_l = 1$ должна существовать точка пересечения. Напротив, при $\varepsilon < \sqrt{5}$ такое пересечение отсутствует (см. также фиг. 54, *б*).

Таким образом, при $d > \sqrt{5}\,\lambda(T)$ имеет место фазовый переход первого рода при критическом поле H_l, определяемом соотношениями (6.60) и (6.61). При $d < \sqrt{5}\,\lambda(T)$ во всей области существования решения $f_l \neq 0$ потенциал G_s лежит ниже, чем G_n; параметр ψ при увеличении поля H убывает по закону (6.54), пока не обращается в нуль при поле

$$H_l' = \frac{\sqrt{24}}{\varepsilon} H_c. \tag{6.62}$$

Переход, происходящий в поле H_l', является фазовым переходом второго рода. Возможность существования двух типов поведения в зависимости от величины отношения $d/\lambda(T)$ была предсказана Гинзбургом [106] в 1952 г. (см. также [107]). В дальнейшем его выводы получили качественное подтверждение в экспериментах Дугласа [108] по туннельному эффекту на алюминии ($\xi_0 = 16\,000$ Å). Дуглас показал, что

1) энергетическая щель ε_0 в спектре возбуждений убывает с увеличением поля;

2) при $T \approx 0{,}75 T_c$ в пленках толщиной $d > 3500$ Å щель скачком падает от конечного значения до нуля при достижении полем критического значения;

3) при той же температуре в пленках толщиной $d < 3500$ Å щель ε_0 плавно уменьшается до нуля при возрастании поля вплоть до критического значения.

Эти результаты представлены на фиг. 54, *в*. Отчетливо видна разница в поведении, характерном для фазового перехода первого и второго рода. К сожалению, дальше этих качественных суждений продвинуться трудно по следующей причине. Для всех изученных пленок выполнялось неравенство $\lambda(T)$, $d < \xi_0$, поэтому плотность тока j сильно менялась на расстояниях порядка ξ_0 (вспомним, что при переходе с одной стороны пленки на другую плотность тока j меняет знак). Очевидно, что в этих условиях уравнения Гинзбурга — Ландау становятся неприменимыми [1]).

[1]) На первый взгляд, кажется заманчивой возможность сохранить в рассматриваемом случае уравнения Гинзбурга — Ландау, введя некоторый „эффективный" параметр $\varkappa$, меняющийся по толщине пленки. Однако, поскольку распределение плотности тока $\mathbf{j}$ зависит одновременно от d и $\lambda(T)$, ясно, что при данной толщине пленки параметр $\varkappa$ также будет зависеть от $\lambda(T)$ и, таким образом, потеряет свою универсальность. Более того, даже в пределе $\lambda(T) \gg d$ численные значения параметра $\varkappa$, полученные из измерений критического поля и критического тока (для той же пленки), будут различными.

Отметим, что в сильных полях энергетическая щель ε_0 для тонких пленок не совпадает со значением параметра $|\Delta|$. В частности, имеется конечная область в плоскости (H, T), в которой $\varepsilon_0 = 0$, но $\Delta \neq 0$ (бесщелевая сверхпроводимость). Это обстоятельство также несколько усложняет анализ результатов эксперимента.

Задача. Сверхпроводящая пленка в форме тонкостенного цилиндра радиусом R (большим по сравнению с толщиной пленки $2d$) находится в магнитном поле h_0, параллельном оси цилиндра. Определить поле h_i в полости цилиндра для следующих двух случаев:

а) так называемый „флюксоид" Φ_f (см. определение ниже) поддерживается постоянным;

б) величина Φ_f может меняться и принимает наиболее выгодное значение.

Решение. По определению, „флюксоид" Φ_f пропорционален изменению фазы $[\varphi]$ параметра порядка при полном обходе вокруг цилиндра:

$$\Phi_f = \frac{ch}{2e}[\varphi].$$

Сразу отметим, что изменение $[\varphi]$, допустимое пунктом „б" условия задачи, на практике непременно должно сопровождаться образованием в пленке вихревых нитей либо макроскопических „пучков" нитей.

а) Полагая в (6.12)

$$\psi = |\psi| e^{i\varphi(\mathbf{r})},$$

запишем плотность тока в виде

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{m}|\psi|^2\left(\hbar\nabla\varphi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right).$$

Для слабых полей h_0 амплитуду параметра порядка $|\psi|$ можно считать равной ее значению ψ_0 в отсутствие поля. Интегрируя затем обе стороны написанного выражения по окружности, проходящей по *внутренней* поверхности цилиндра, находим

$$\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{l} = \frac{c}{4\pi\lambda^2}(\Phi_f - \Phi_i),$$

где Φ_i — поток, заключенный в полости, а λ — глубина проникновения [см. (6.22а)]. Можно считать, что поле h внутри пленки удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{h}{\lambda^2}$$

(ось x направлена перпендикулярно пленке) и граничным условиям (при $x = \pm d$)

$$h(d) = h_0, \quad h(-d) = h_i.$$

Решение, очевидно, имеет вид

$$h = \frac{h_0 - h_i}{2}\frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/\lambda)} + \frac{h_0 + h_i}{2}\frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/\lambda)}, \qquad -d \leqslant x \leqslant d.$$

Вычисляя теперь в явном виде циркуляцию $\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{l}$ и сравнивая ее с предыдущим выражением, легко найти искомое поле

$$h_i = \frac{\dfrac{\Phi_f}{\pi\lambda R} + \dfrac{2h_0}{\operatorname{sh}(2d/\lambda)}}{2\operatorname{cth}(2d/\lambda) + R/\lambda} \approx \frac{\Phi_f}{\pi R^2} + \frac{2h_0\lambda}{2\operatorname{sh}(2d/\lambda)} \qquad \left(R \gg \frac{\lambda^2}{d}\right).$$

В частности, при $\Phi_f = 0$ имеем

$$h_i \approx \frac{2h_0\lambda}{R\,\mathrm{sh}\,(2d/\lambda)}.$$

Вообще говоря, поле h_i очень мало по сравнению с внешним полем h_0, за исключением случая чрезвычайно тонких пленок ($d \lesssim \lambda^2/R$).

б) Предположим теперь, что Φ_f может меняться; в заданном поле h_0 его величина определяется из условия минимума потенциала Гиббса $\mathcal{G}$. Запишем выражение для $\mathcal{G}$ в виде

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8\lambda^2}\int\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi}\int (h-h_0)^2\,d\mathbf{r} + \text{const}.$$

Подставляя сюда ранее полученное решение для поля, можно показать, что минимуму потенциала $\mathcal{G}$ соответствует $h_i = h_0$.

Таким образом, в состоянии термодинамического равновесия поле внутри полого цилиндра равно приложенному. Однако в экспериментах, в которых поле меняется во времени, часто случается, что равновесие не успевает установиться за время наблюдения. Тогда мы встречаемся со случаем, когда поле внутри цилиндра мало.

§ 6. ИЗМЕНЕНИЕ АМПЛИТУДЫ $|\psi|$ В ПРОСТРАНСТВЕ

Образование зародышей внутри массивного образца

Рассмотрим сверхпроводящий металл, находящийся в сильном магнитном поле. Если сделать величину поля достаточно большой, сверхпроводимость разрушится и поле становится однородным во всем объеме образца. Будем теперь плавно уменьшать величину поля. Тогда при достижении полем определенного значения $H = H_{c2}$ в образце спонтанно начнут образовываться сверхпроводящие области. Дальше мы увидим, что поле H_{c2} не совпадает с полем H_c; в зависимости от условий оно может быть как больше, так и меньше.

В той области, где начинают возникать сверхпроводящие зародыши, параметр $|\psi|$ мал, что позволяет произвести линеаризацию уравнения Гинзбурга — Ландау

$$\frac{1}{2m}\left(-ih\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi = -\alpha\psi. \tag{6.63}$$

Кроме того, в уравнении (6.63) можно считать, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — однородное внешнее поле. Это допустимо потому, что сверхпроводящие токи пропорциональны $|\psi|^2$, следовательно, вызванные ими поправки к полю в линейном приближении пренебрежимо малы. Таким образом, уравнение (6.63) формально совпадает с уравнением Шредингера для частицы с зарядом $2e$ и массой m в однородном магнитном поле.

Рассмотрим сначала случай *неограниченной среды*, в которой частица движется вдоль поля с постоянной скоростью v_z и одновременно

совершает движение по окружности в плоскости xy с частотой

$$\omega_c = \frac{2eH}{mc}. \tag{6.63а}$$

Уровни энергии, соответствующие собственным функциям уравнения (6.63), имеют вид

$$-\alpha = \frac{1}{2} m v_z^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c, \tag{6.64а}$$

где n — положительное целое число. В частности, наинизшему уровню энергии отвечает $v_z = 0$ и $n = 0$, так что

$$-\alpha = \frac{e\hbar H}{mc}. \tag{6.64б}$$

Полученное таким образом поле H представляет собой поле H_{c2}. (Другим уровням с $v_z \neq 0$ и $n \neq 0$ соответствуют при том же значении α меньшие поля.) Используя соотношение $\alpha^2/2\beta = H_c^2/8\pi$ и выражение (6.26) для параметра $\varkappa$ теории Гинзбурга — Ландау, окончательно получаем

$$H_{c2} = \varkappa \sqrt{2}\, H_c,$$

или

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(T)}. \tag{6.65}$$

ОБСУЖДЕНИЕ ФОРМУЛЫ (6.65)

1. Для $\varkappa > 1/\sqrt{2}$, т. е. $H_c < H_{c2}$, конденсированная фаза ($\psi \neq 0$) образуется в толще образца при полях $H < H_{c2}$. Эта фаза не может приводить к полному вытеснению магнитного потока из образца, поскольку при полях $H > H_c$ полный эффект Мейсснера энергетически невыгоден, и мы можем считать, что $H_c < H < H_{c2}$. Фактически состояние, получающееся при полях, меньших H_{c2}, представляет собой смешанное состояние, которое мы обсуждали в гл. III. Как там и предсказывалось, верхнее поле имеет порядок $\phi_0/\xi^2(T)$. Это значение поля соответствует плотной упаковке вихревых нитей, каждая из которых несет квант потока ϕ_0 и имеет остов радиусом порядка $\xi(T)$.

2. Для $\varkappa < 1/\sqrt{2}$, т. е. $H_{c2} < H_c$, при уменьшении поля сначала достигается поле H_c, при котором возникает полный эффект Мейсснера, иначе говоря, мы имеем сверхпроводник первого рода. Таким образом, деление сверхпроводников на два типа можно произвести в зависимости от величины параметра $\varkappa$. Для сверхпроводников первого рода $\varkappa < 1/\sqrt{2}$, для сверхпроводников второго рода $\varkappa > 1/\sqrt{2}$.

Образование зародышей вблизи поверхности образца

Соотношение (6.65) справедливо лишь для безграничной среды, поскольку при его выводе мы полностью пренебрегли эффектами на границах образца. В действительности в идеальных материалах, как

впервые было показано в работе Сент-Джеймса и автора [110], образование сверхпроводящих зародышей всегда в первую очередь происходит на поверхности образца. Рассмотрим теперь подробнее влияние поверхности образца в простейшем случае, когда эту поверхность можно считать плоской [радиус кривизны намного превышает $\xi(T)$]. Кроме того, будем предполагать, что сверхпроводник находится в контакте с диэлектриком или вакуумом, следовательно, применимо граничное условие (6.13). Рассмотрим два случая.

1. Поле (направленное вдоль оси z) перпендикулярно поверхности (плоскость xy). Очевидно, функция ψ, соответствующая наинизшему уровню (6.64б), является также собственной функцией оператора $\Pi_z = -i\hbar(\partial/\partial z) - 2eA_z/c$ с собственным значением 0. Поэтому условие (6.13) автоматически удовлетворяется и поверхность не влияет на величину поля, при котором впервые образуются зародыши.

2. Поле, по-прежнему направленное вдоль оси z, параллельно поверхности образца (плоскость yz), а сверхпроводник занимает полупространство $x \geqslant 0$. Возьмем калибровку, в которой $A_x = A_z = 0$, $A_y = Hx$ и будем искать решение в виде

$$\psi = e^{iky} f(x). \tag{6.66}$$

Тогда уравнение (6.63) принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{2m}\left(\hbar k - \frac{2eHx}{c}\right)^2 f = -\alpha f \tag{6.67}$$

с граничным условием

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} = 0. \tag{6.68}$$

Уравнение (6.67) совершенно аналогично уравнению Шредингера для гармонического осциллятора с частотой ω_c [см. (6.63а)] и положением равновесия в точке

$$x_0 = \frac{\hbar ck}{2eH}. \tag{6.69}$$

Несколько усложняет анализ наличие граничного условия (6.68). Пусть $x_0 \gg \xi(T)$; тогда волновая функция локализована вблизи x_0 и близка к нулю на поверхности, т. е. условие (6.68) автоматически выполняется. Эта волновая функция имеет вид

$$f \approx \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x - x_0}{\xi(T)}\right]^2\right\}. \tag{6.70}$$

Собственное значение по-прежнему определяется уравнением (6.63). Если же $x_0 = 0$, то функция вида (6.70) тоже удовлетворяет граничному условию (6.68) и соответствует прежнему собственному значению (6.63). Покажем теперь, что в промежутке между этими край-

ними случаями, а именно при $x_0 \sim \xi(T)$ существует решение, которое отвечает наинизшему собственному значению [меньшему (6.64б)].

Для доказательства заменим уравнение (6.67), справедливое лишь при $x > 0$, уравнением

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2f}{dx^2}+V(x)f=-\alpha f, \tag{6.71}$$

которое справедливо во всем интервале $-\infty < x < \infty$. Потенциал $V(x)$ при $x > 0$ совпадает с потенциалом, входящим в исходное уравнение (6.67), а при $x < 0$ является его симметричным продолжением, как показано на фиг. 55, *а*:

$$V(x)=\begin{cases}\dfrac{2e^2H^2}{mc^2}(x-x_0)^2, & x>0,\\ V(-x), & x<0.\end{cases} \tag{6.72}$$

Волновая функция основного состояния [соответствующая наименьшему собственному значению уравнения (6.71)] не имеет нулей и является четной, т. е. автоматически удовлетворяет условию (6.68). В области $x < 0$ потенциал $V(x)$ удовлетворяет неравенству

$$V(x)<\frac{2e^2H^2}{mc^2}\left(x-x_0\right)^2$$

(см. фиг. 55, *а*), поэтому, очевидно, наинизший уровень энергии при наличии потенциала $V(x)$ лежит ниже значения, определяемого уравнением (6.64б). Следовательно, *наличие поверхности способствует образованию зародышей.*

Численный расчет показывает, что оптимальное значение x_0 равно $0{,}59\xi(T)$; тогда для собственного значения получаем

$$-\alpha=0{,}59\frac{e\hbar H}{mc}. \tag{6.73}$$

Соответствующая собственная функция представляет собой функцию Вебера, имеющую довольно сложный вид. Однако, как впервые отметил Киттель (не опубликовано), хорошее приближение к точному решению можно получить более простым путем, применяя вариационный метод к уравнению Шредингера (6.67) [1]. Беря в качестве пробной функции гауссову функцию

$$f(x)=e^{-rx^2}$$

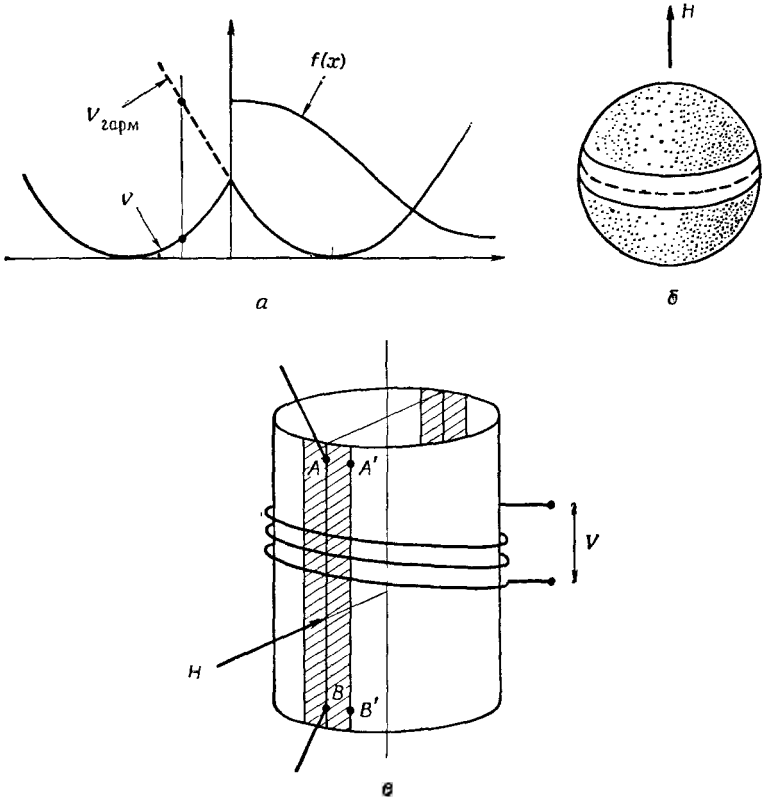
и минимизируя $|\alpha|$ по отношению к r и x_0, получаем

$$|\alpha|=\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}\frac{e\hbar H}{mc}=0{,}60\frac{e\hbar H}{mc}.$$

Обозначим через H_{c3} поле, при котором начинается образование зародышей. Используя (6.65), запишем основной результат (6.73) в виде

$$H_{c3}=2{,}4\varkappa H_c=1{,}7H_{c2}. \tag{6.74}$$

[1]) Расчет поверхностной сверхпроводимости с помощью вариационного метода см. в работе [139]. — *Прим. ред.*



Фиг. 55. Поверхностная сверхпроводимость в сильных магнитных полях.

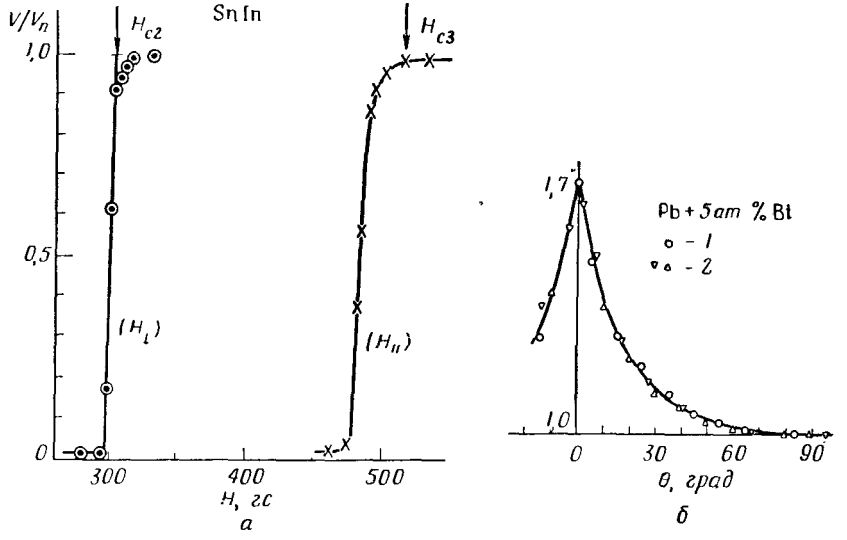
а — потенциал гармонического осциллятора $V_{\text{гарм}} = \text{const}\,(x - x_0)^2$, симметричный потенциал $V(x)$ и собственная функция $f(x)$ основного состояния. Так как $V < V_{\text{гарм}}$, низший уровень, отвечающий потенциалу V, лежит ниже, чем для потенциала $V_{\text{гарм}}$.

б — поверхностная сверхпроводимость в случае сферы. Если H немного меньше H_{c3}, вдоль экватора образуется узкий сверхпроводящий пояс. При уменьшении H этот пояс расширяется и при $H = H_{c2}$ достигает полюсов.

в — принципиальная схема определения полей H_{c2} и H_{c3} для полого цилиндра (Бурже и др. [111]). Поле $H > H_{c2}$ перпендикулярно оси цилиндра. На его поверхности образуются две нормальные области в виде продольных полос (показаны штриховкой). Их возникновение сопровождается резким увеличением самоиндукции, что регистрируется с помощью катушки, навитой на цилиндр. Ширину полос можно определить, измеряя сопротивление между точками A и B. Ток течет от A к A', далее по сверхпроводящей области от A' к B', затем от B' к B. Сопротивление пропорционально расстоянию AA'.

ОБСУЖДЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ (6.74)

1. Сверхпроводники второго рода. Приведенное рассмотрение показывает, что при полях, бо́льших H_{c2}, в интервале $H_{c2} < H < H_{c3}$ сверхпроводимость разрушается не полностью; основная часть материала находится в нормальном состоянии, однако в определенных областях поверхности сохраняется *сверхпроводящий слой.* В цилиндре, находящемся в продольном поле, этот слой занимает всю боковую поверхность. В случае сферы положение иное. Когда поле H лишь незначительно меньше, чем H_{c3}, сверхпроводящий слой представляет собой узкий пояс вдоль экватора (фиг. 55, *б*). При уменьшении величины H пояс расширяется и, наконец, достигает полюсов при $H = H_{c2}$.



Фиг. 56. Экспериментальные данные относительно критических полей для сверхпроводников второго рода.

а — результаты измерений самоиндукции на полых цилиндрах из сплава SnIn (см. фиг. 55, *в*). Если поле H перпендикулярно оси цилиндра, то разность потенциалов V, пропорциональная самоиндукции катушки, резко возрастает при $H = H_{c2}$. Если же поле H параллельно оси, возрастание потенциала происходит при $H = H_{c3}$ (Бурже и др. [111]).

б — угловая зависимость величины $H_{c3}(\theta)/H_{c2}$ для сплава Pb + 5 ат. % Bi при температурах 4,2° К (*1*) и 1,6° К (*2*) (Бурже и др. [112]).

Для наблюдения сверхпроводящего слоя на поверхности используются различные методы, например: а) *измерение сопротивления* (при слабых измерительных токах сопротивление слоя равно нулю); б) *индукционные измерения* на низких частотах. Пока на поверхности цилиндра имеется сверхпроводящий слой, силовые линии не могут пересекать его и самоиндукция катушки мала; при достижении полем значения $H = H_{c3}$ сверхпроводящий слой исчезает и восстанавливается полная величина самоиндукции (фиг. 56, *а*). Аналогичные, но более трудные эксперименты можно

в принципе выполнить с помощью измерений импеданса в микроволновом диапазоне.

При работе с *пленками*, толщина которых велика по сравнению с $\xi(T)$, можно использовать различные чувствительные методы, например измерение плотности состояний с помощью туннельных экспериментов. При наличии сверхпроводящего слоя эта величина сильно отличается от ее значения для нормальной пленки. Другой метод состоит в измерении крутильного момента, который может возникнуть при появлении в образце небольших диамагнитных областей.

В результате подобных опытов было установлено, что в образцах с достаточно чистой поверхностью и с радиусом кривизны, значительно превышающим величину $\xi(T)$, сверхпроводящий слой действительно существует в полях, лежащих в интервале $H_{c2} < H < H_{c3}(\theta)$, где θ — угол между полем H и нормалью к поверхности. При $\theta = 0$ экспериментальная величина $H_{c3}(0)$ весьма близка к теоретическому значению (6.74). Зависимость $H_{c3}(\theta)$ от угла θ для сплавов PbBi показана на фиг. 56, *б*; при $\theta \to \pi/2$ поле $H_{c3}(\theta)$ стремится к значению H_{c2}.

2. Сверхпроводники первого рода с $0{,}42 < \varkappa < 1/\sqrt{2}$. В данном случае $H_{c2} < H_c$, но $H_{c3} > H_c$, поэтому в области полей $H_c < H < H_{c3}$ по-прежнему должен существовать сверхпроводящий слой (если поле H параллельно или почти параллельно поверхности образца). Такой слой действительно наблюдался на некоторых сверхпроводниках первого рода, а именно на чистом свинце, а также его разбавленных сплавах.

3. Сверхпроводники первого рода с $\varkappa < 0{,}42$. Здесь $H_{c3} < H_c$, поэтому в состоянии термодинамического равновесия сверхпроводящий слой наблюдать невозможно. Тем не менее величину поля H_{c3} удается измерить. Дело в том, что хорошие образцы могут оставаться в нормальном (метастабильном) состоянии при понижении поля до значений, меньших H_c. Например, для Al поле можно понизить, не вызывая перехода, до значений, меньших $H_c/10$. Однако метастабильная нормальная фаза никогда не сохраняется вплоть до нулевого значения поля, поскольку при достижении поля H_{c3} вблизи поверхности образца могут образоваться сверхпроводящие слои, причем этот процесс происходит без затраты энергии. При полях $H \leqslant H_{c3}$ нормальная фаза абсолютно неустойчива. Процессы образования зародышей были тщательно изучены в опытах Фабера [113] на различных сверхпроводниках первого рода. Он показал, что зародыши возникают прежде всего вблизи поверхности образца (в то время не было ясно, что это является фундаментальным свойством), и измерил соответствующее значение поля, которое мы теперь называем полем H_{c3}. Используя его результаты, можно попытаться оценить с помощью уравнения (6.74) значения параметра $\varkappa$ для изученных им материалов. Грубая оценка дает следующие значения $\varkappa$:

0,015 для Al; 0,07 для In; 0,10 для Sn.

Такой способ нельзя считать вполне корректным для рассматриваемых чистых металлов, поскольку для них уравнения Гинзбурга — Ландау применимы лишь при температурах, очень близких к T_c, в то время как поля переохлаждения измерялись обычно при более низких температурах. Для полноты мы приведем также „теоретические“ значения $\varkappa$, полученные с помощью соотношения (6.27) [параметры $\lambda_L(0)$ и ξ_0 находятся с помощью данных по измерению поверхности Ферми в нормальном состоянии и экспериментальных значений T_c]. Эти значения $\varkappa$ таковы:

0,010 для Al; 0,05 для In; 0,15 для Sn.

§ 7. СТРУКТУРА СМЕШАННОГО СОСТОЯНИЯ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ $H \sim H_{c2}$

Рассмотрим цилиндрический образец, изготовленный из сверхпроводника второго рода ($\varkappa > 1/\sqrt{2}$), во внешнем поле H, параллельном оси цилиндра. Если уменьшать поле H, то при $H = H_{c2}$ в объеме образца начнут образовываться сверхпроводящие зародыши. При этом амплитуда параметра порядка $|\psi|$ мала, так что вид функции ψ можно определить, исходя из линеаризованного уравнения Гинзбурга — Ландау (6.63). При дальнейшем уменьшении поля H число зародышей увеличивается, амплитуда $|\psi|$ также возрастает и для определения характера образующейся периодической структуры необходимо решать систему сложных нелинейных уравнений Гинзбурга — Ландау. Такая задача может быть решена только численным образом.

Однако, если поле H лишь незначительно меньше H_{c2}, возникают значительные упрощения [33]. Из соображений непрерывности следует ожидать, что решение ψ полной системы уравнений Гинзбурга — Ландау должно быть во многих отношениях близко к решению ψ_L линеаризованного уравнения

$$-\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}_0\right)^2 \psi_L = -\alpha\psi_L, \tag{6.75а}$$

где

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}_0 = (0,\ 0,\ H_{c2}). \tag{6.75б}$$

Собственные функции ψ_L уравнения (6.75а) сильно вырождены; физически это связано с тем, что зародыши могут независимо возникать в любой части образца. Например, для рассматриваемой калибровки $\mathbf{A}_0 = (0,\ xH_{c2},\ 0)$ мы уже нашли решения вида

$$\psi_k = \exp(iky)\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-x_0)^2}{\xi^2(T)}\right],$$
$$x_0 = \frac{\hbar ck}{2eH_{c2}}, \tag{6.76}$$

где k — произвольный параметр. Такие решения описывают зародыши в форме полосы [шириной $\sim \xi(T)$], перпендикулярной оси x; положение ее середины ($x = x_0$) зависит от выбранного значения k.

Функция ψ_L, как мы знаем, должна представлять собой линейную комбинацию функций ψ_k. Из упрощенного анализа, проведенного в гл. III, следует, что амплитуда $|\psi|$ является периодической функцией x и y. Следовательно, если период по y равен $2\pi/q$, функция ψ_L

должна иметь вид

$$\psi_L = \sum_n C_n \exp(inqy) \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-x_n)^2}{\xi^2(T)}\right], \qquad x_n = \frac{n\hbar cq}{2eH_{c2}}. \tag{6.77}$$

Чтобы амплитуда $|\psi_L|$ также являлась периодической функцией по x, необходимо на коэффициенты C_n наложить условие периодичности. Следуя Абрикосову, положим

$$C_{n+\nu} = C_n,$$

где ν — фиксированное целое число; тогда

$$\psi_L\left(x + \frac{\nu\hbar cq}{2eH_{c2}},\ y\right) = e^{i\nu qy}\psi_L(x,\ y).$$

Независимо от конкретного вида функции ψ_L [см. (6.77)] удается установить ряд общих теорем.

1. Нормировка функции ψ_L. Исходные уравнения (6.11) и (6.12) являются нелинейными относительно ψ, поэтому вопрос о нормировке функции ψ_L не является тривиальным. Предположим, что пробная функция ψ_L дает значение свободной энергии, остающееся стационарным при замене $\psi_L \to (1+\varepsilon)\psi_L$, где ε — малое число, не зависящее от $\mathbf{r}$. В линейном по ε приближении вариацию свободной энергии можно написать в виде

$$\delta\mathcal{F} = 2\varepsilon \int d\mathbf{r}\left[\alpha|\psi_L|^2 + \beta|\psi_L|^4 + \frac{1}{2m}\left|\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_L\right|^2\right]. \tag{6.78}$$

Для простоты интегралы типа $\int |\psi_L|^2 d\mathbf{r}$, взятые по объему V образца, будем обозначать через $V\overline{|\psi_L|^2}$. Тогда, используя (6.78), условию стационарности $\delta\mathcal{F} = 0$ можно придать вид

$$\overline{\alpha|\psi_L|^2} + \overline{\beta|\psi_L|^4} + \frac{1}{2m}\overline{\left|\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_L\right|^2} = 0. \tag{6.79}$$

Это уравнение можно несколько упростить, приняв во внимание, что функция ψ_L удовлетворяет уравнению (6.75а). Для этого положим $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$, где $\mathbf{A}_0$ — соответствующий полю H_{c2} вектор-потенциал, определяемый соотношением (6.75б). Добавка $\mathbf{A}_1$ появляется вследствие того, что, во-первых, приложенное поле несколько меньше, чем H_{c2}, и, во-вторых, в образце возникают сверхпроводящие токи, также дающие вклад в величину поля. Выделяя в уравнении (6.79) члены первого порядка по $\mathbf{A}_1$ и используя (6.75а), находим

$$\overline{\beta|\psi_L|^4} - \frac{1}{c}\overline{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{j}_L} = 0, \tag{6.80}$$

где

$$\mathbf{j}_L = \frac{e}{m}\left[\psi_L^*\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}_0\right)\psi_L + \text{Компл. сопр.}\right] \tag{6.81}$$

— плотность тока, соответствующая невозмущенному решению. Интегрируя в (6.80) второй член по частям и полагая $\operatorname{rot}\mathbf{A}_1 = \mathbf{h}_1$, $\operatorname{rot}\mathbf{h}_s = (4\pi/c)\,\mathbf{j}_L$, окончательно получаем

$$\beta\overline{|\psi_L|^2} - \frac{1}{4\pi}\overline{\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_s} = 0. \tag{6.82}$$

2. Связь между полем и параметром порядка. Чтобы записать условие (6.82) в явном виде, необходимо знать поля $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_s$. (Основываясь на результатах гл. III, можно думать, что поля $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_s$ всюду параллельны оси z.) Положим

$$h_1(\mathbf{r}) = H - H_{c2} + h_s(\mathbf{r}), \tag{6.83}$$

где поле h_s описывает вклад сверхпроводящих токов [1]).

Для вычисления поля h_s предварительно докажем следующее свойство. Если ψ_L отвечает наинизшему собственному значению $-\alpha = \hbar\omega_c/2$ уравнения (6.75а), то *линии тока* $\mathbf{j}_L$ совпадают с *линиями* $|\psi_L| = \text{const}$.

Доказательство. Введем вектор

$$\Pi = (2m\hbar\omega_c)^{-1/2}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}_0\right)$$

и $\Pi_\pm = \Pi_x \pm i\Pi_y$; коммутатор $[\Pi_+, \Pi_-]$ равен единице. В этих обозначениях уравнение (6.75а) можно записать в виде

$$\Pi_+\Pi_-\psi_L = 0. \tag{6.84}$$

Собственные функции уравнения (6.84) удовлетворяют условию

$$\Pi_-\psi_L = 0.$$

Положим

$$\begin{aligned}\psi_L &= |\psi_L|\,e^{i\theta},\\ j_L &= \frac{2e}{m}|\psi_L|^2\left(\hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c}\mathbf{A}_0\right).\end{aligned} \tag{6.85}$$

Тогда, приравнивая действительную и мнимую части выражения $\Pi_-\psi_L$ нулю и используя (6.85), находим

$$\begin{aligned}j_{Lx} &= -\frac{e\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial y}|\psi_L|^2,\\ j_{Ly} &= \frac{e\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x}|\psi_L|^2.\end{aligned} \tag{6.86}$$

---

[1]) Ток $\mathbf{j}_L = (c/4\pi)\operatorname{rot}\mathbf{h}_s$ не является, строго говоря, сверхпроводящим, поскольку в выражение (6.81) вместо $\mathbf{A}_1$ входит $\mathbf{A}_0$. Однако мы скоро увидим, что величины $H_{c2} - H$ и $|\psi|^2$ одного порядка и, следовательно, член $\overline{(A_0 - A)|\psi|^2}$ того же порядка, что и $|\psi|^4$, т. е. в рассматриваемом приближении им можно полностью пренебречь.

Отсюда видно, что линии тока являются одновременно линиями постоянных значений $|\psi_L|$.

Сравнивая (6.86) и определение $\operatorname{rot} \mathbf{h}_s = (4\pi/c)\,\mathbf{j}_L$, легко получить явное выражение для поля h_s, возникающего из-за наличия сверхпроводящих токов

$$h_s = -4\pi \frac{eh}{mc} |\psi_L|^2. \tag{6.87}$$

Постоянная интегрирования выбрана равной нулю из условия, что $\overline{|\psi_L|^2} = 0$ при $h_s = 0$. Подставляя (6.83) и (6.87) в (6.82), окончательно находим

$$\beta \overline{|\psi_L|^4} + \frac{eh}{mc} \overline{|\psi_L|^2 \left(H - H_{c2} - \frac{4\pi e h}{mc} |\psi_L|^2\right)} = 0. \tag{6.88а}$$

Полезно переписать это уравнение в несколько ином виде, положив $|\psi_L| = \psi_0 f$ и вводя величины $\varkappa$ и H_{c2} с помощью соотношений (6.26) и (6.64):

$$\left(1 - \frac{1}{2\varkappa^2}\right) \overline{f^4} - \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right) \overline{f^2} = 0. \tag{6.88б}$$

В такой форме уравнение (6.88б) играет особо важную роль, поскольку оно не зависит от конкретного вида функции ψ_L, т. е. не зависит от характера структуры, образуемой вихревыми нитями. Выбирая определенную решетку, т. е. считая известными значение q и период коэффициентов C_n, можно явно вычислить величину отношения

$$\frac{\overline{f^4}}{(\overline{f^2})^2} = \beta_A, \tag{6.89}$$

соответствующего данной решетке. В свою очередь, зная β_A, легко найти с помощью (6.88б) и (6.89) средние $\overline{f^4}$ и $\overline{f^2}$. Этих сведений вполне достаточно для вычисления индукции и свободной энергии.

1. Индукция $\mathbf{B}$, по определению, представляет собой результат усреднения поля $\mathbf{H} + \mathbf{h}_s$. С помощью (6.87) ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} B &= H + \overline{h_s} = H - \frac{4\pi e h}{mc} \overline{|\psi_L|^2}, \\ B &= H - \frac{H_c}{\varkappa \sqrt{2}} \overline{f^2}. \end{aligned} \tag{6.90}$$

2. Плотность *свободной энергии* F можно вычислить, исходя из (6.9) и (6.11):

$$F = -\frac{\beta}{2} \overline{|\psi_L|^4} + \frac{\overline{h^2}}{8\pi} = -\frac{H_c^2}{8\pi} \overline{f^4} + \frac{\overline{h^2}}{8\pi}. \tag{6.91}$$

Возвращаясь к (6.87), выразим $\overline{h^2}$ через H, $\overline{f^2}$ и $\overline{f^4}$. Исключая затем H, $\overline{f^2}$, $\overline{f^4}$ с помощью (6.88б), (6.89) и (6.90), получаем выражение для плотности свободной энергии, содержащее только индукцию B:

$$F = \frac{B^2}{8\pi} - \frac{(H_{c2} - B)^2}{1 + (2\varkappa^2 - 1)\beta_A}. \tag{6.92}$$

ВЫВОДЫ

1. При заданном значении индукции B свободная энергия F является возрастающей функцией β_A, если $\varkappa > 1/\sqrt{2}$. Наиболее выгодная „решетка" соответствует *наименьшему значению* β_A. [Заметим, что, согласно (6.89), $\beta_A \geqslant 1$.]

Формально выбор решетки осуществляется путем наложения определенных условий периодичности на коэффициенты C_n в разложении (6.77). Практически подробно исследованы два вида решеток вихревых нитей, а именно *квадратная* и *треугольная*. Квадратная решетка получается, если положить все коэффициенты C_n равными между собой, а *треугольная* при условии, что

$$C_{n+2} = C_n,$$
$$C_1 = iC_0.$$

В обоих случаях параметр q выбирается из требования, чтобы величина β_A для данной конфигурации имела минимальное значение. Найдено, что для квадратной решетки $\beta_A = 1{,}18$; для треугольной $\beta_A = 1{,}16$, т. е. последняя обладает несколько большей устойчивостью [43, 44]. Линии $|\psi|^2 = \text{const}$ для треугольной решетки показаны на фиг. 26.

2. Зная β_A, с помощью выражения (6.92) для свободной энергии можно произвести расчеты интересующих нас термодинамических величин. Прежде всего легко убедиться, что

$$4\pi \frac{dF}{dB} = H,$$

как и следовало ожидать. Затем можно вычислить намагниченность

$$M = \frac{B - H}{4\pi} = \frac{H - H_{c2}}{4\pi\beta_A(2\varkappa^2 - 1)}, \quad \frac{H_{c2} - H}{H_{c2}} \ll 1. \tag{6.93}$$

Как мы и предполагали, M имеет порядок $|\psi|^2$; при $H = H_{c2}$ намагниченность обращается в нуль. В этой точке имеет место фазовый переход второго рода. (Однако, если параметр $\varkappa$ лишь незначительно превышает $1/\sqrt{2}$, то величина наклона $|dM/dH|$ становится очень большой.) Детальная проверка выражения (6.93) была проведена в опыте Кинсела и др. [114] на сплаве InBi, содержащем 2,5% Bi. Этот сплав представляет собой сверхпроводник второго рода с почти обратимой кривой намагничивания. Полученная из измерений намагниченности фазовая диаграмма для этого сплава показана на фиг. 57. По экспериментальным значениям поля H_{c2} вблизи T_c можно определить параметр

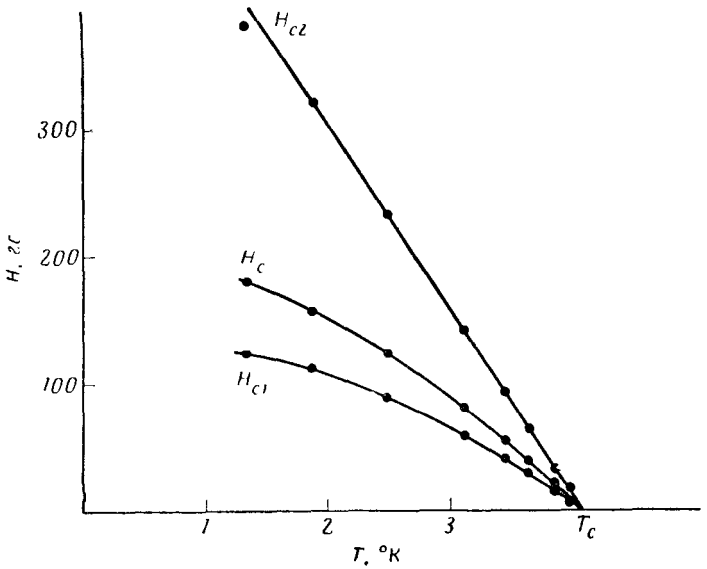
$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{H_{c2}}{H_c} = 1{,}80.$$

С другой стороны, полагая $\beta_A = 1{,}16$ в выражении (6.93) и сравнивая его с экспериментальной кривой намагничивания, найдем

$$\varkappa = 1{,}81.$$

Полученное прекрасное согласие подтверждается также теоретическим расчетом параметра $\varkappa$, описанным ниже [1]).

Задача. Показать, что поверхностная энергия для сверхпроводников первого рода обращается в нуль при $\varkappa = 1/\sqrt{2}$.



Фиг. 57. Фазовая диаграмма для сверхпроводника второго рода — сплава InBi (Кинсел и др. [114]).

Решение. Используемый ниже метод расчета принадлежит Сарма (не опубликовано). Пусть поле $\mathbf{h}$ направлено вдоль оси z; тогда уравнение Гинзбурга — Ландау становится двумерным:

$$\frac{1}{2m}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2\right)\psi + \alpha\psi + \beta\,|\psi|^2\,\psi = 0,$$

где $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - (2e\mathbf{A}/c)$. Полагая $\Pi_\pm = \Pi_x \pm i\Pi_y$, имеем

$$\Pi_x^2 + \Pi_y^2 = \Pi_-\Pi_+ + \frac{2e\hbar}{c}\,h.$$

Будем рассматривать решения ψ, удовлетворяющие условию

$$\Pi_+\psi = 0.$$

Для этого частного класса решений значения поля h и параметра порядка ψ в произвольной точке сверхпроводника связаны между собой простым со-

[1]) Столь хорошее согласие представляется даже несколько удивительным, поскольку экспериментальные кривые намагничивания не вполне обратимы, что в свою очередь должно приводить к погрешностям при определении наклона $(dM/dH)_{H_{c2}}$.

отношением

$$\frac{e\hbar}{mc} h + \alpha + \beta |\psi|^2 = 0.$$

Естественно, поля и токи, вычисленные с помощью этих частных решений, не должны противоречить уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi e}{mc} (\psi^* \Pi \psi + \psi \Pi^* \psi),$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} - i \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{4\pi e}{mc} [\psi^* \Pi_+ \psi + \psi (\Pi_- \psi)^*] = \frac{4\pi e}{mc} \psi (\Pi_- \psi)^*.$$

Используя полученную ранее зависимость $h(\psi)$, преобразуем левую часть последнего уравнения следующим образом. Выполнив дифференцирование, имеем

$$\frac{e\hbar}{mc} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - i \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \beta \psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \beta \psi \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y} - i \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) = 0.$$

Воспользуемся снова условием $\Pi_+ \psi = 0$, представив его в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{2e}{\hbar c} (A_x + i A_y) \psi.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial h}{\partial y} - i \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\beta mc}{e\hbar^2} \psi (\Pi_- \psi)^*.$$

Это уравнение согласуется с уравнением Максвелла, если

$$\frac{4\pi e}{mc} = \frac{\beta mc}{e\hbar^2},$$

т. е. $\varkappa = 1/\sqrt{2}$ в соответствии с условием задачи.

Обратимся теперь к рассмотрению границы, разделяющей нормальную и сверхпроводящую области. Пусть она лежит в плоскости yz. Тогда при $x \to -\infty$, т. е. в нормальной области $h = H_c$, $\psi = 0$, тогда как при $x \to +\infty$, т. е. в сверхпроводящей области $h = 0$, $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$. Оба условия согласуются с полученным выше выражением для $h(\psi)$, поэтому его можно использовать для решения поставленной задачи. Запишем термодинамический потенциал (на единицу площади в плоскости yz)

$$\mathcal{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m} |\Pi \psi|^2 + \frac{h^2}{8\pi} - \frac{h H_c}{4\pi} \right).$$

(Здесь последний член представляет собой микроскопический аналог члена $-BH/4\pi$, в котором следует положить $H = H_c$.) Интегрируя по частям третий член этого выражения и учитывая, что функция ψ удовлетворяет уравнению Гинзбурга — Ландау, запишем $\mathcal{G}$ в виде

$$\mathcal{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(-\frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{h^2 - 2H_c h}{8\pi} \right).$$

Для получения поверхностной энергии γ из написанного выражения нужно вычесть интеграл $\int \left(H_c^2/8\pi\right) dx$, равный термодинамическому потенциалу в нормальной (или сверхпроводящей) фазе:

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[-\frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{(h - H_c)^2}{8\pi} \right].$$

Представим зависимость $h(\psi)$ в виде

$$h = H_c - \frac{mc}{eh}\beta|\psi|^2,$$

$$\frac{(h-H_c)^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}\beta^2\left(\frac{mc}{eh}\right)^2|\psi|^4 = \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 \quad \text{при} \quad \varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что $\gamma = 0$, если $\varkappa = 1/\sqrt{2}$.

Аналогичным образом тем же методом удается вычислить до конца энергию изолированной вихревой нити для $\varkappa = 1/\sqrt{2}$. В результате оказывается, что для этого частного значения параметра $\varkappa$ все три поля H_{c1}, H_{c2} и H_c равны по величине.

ЛИТЕРАТУРА

Дальнейшие применения уравнений Гинзбурга — Ландау

Saint-James D., Sarma G., Thomas E. J., II Type Superconductivity, London, 1968.

Глава VII

МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

§ 1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОСТИ

В гл. VI мы вывели уравнения Гинзбурга — Ландау, постулировав выражение для свободной энергии F, содержащее неизвестный коэффициент [например, коэффициент C в выражении (6.7)]. Этот коэффициент учитывает энергию, связанную с пространственными изменениями параметра порядка. Горьков [115] показал, что уравнения Гинзбурга — Ландау можно получить из микроскопической теории, и вычислил, в частности, коэффициент C. Здесь мы приведем эти расчеты в несколько упрощенном виде.

Учет Δ по теории возмущений

Будем исходить из уравнения самосогласованности

$$\Delta(\mathbf{r}) = V \sum_n u_n(\mathbf{r})\, v_n^*(\mathbf{r}) \left[1 - 2f(\varepsilon_n)\right], \tag{7.1}$$

где коэффициенты преобразования Боголюбова u_n, v_n являются собственными функциями системы уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon_n u_n &= \left[\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U - E_F\right] u_n + \Delta v_n, \\ \varepsilon_n v_n &= -\left[\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U - E_F\right] v_n + \Delta^* u_n \end{aligned} \tag{7.2}$$

для положительных собственных значений ε_n. Как обычно, влияние примесей и тому подобные эффекты включены в U. Представим правую часть уравнения (7.1) в виде ряда по степеням Δ, положив

$$\begin{aligned} u_n &= u_n^0 + u_n^1 + \ldots, \\ v_n &= v_n^0 + v_n^1 + \ldots. \end{aligned} \tag{7.3}$$

В нулевом приближении, согласно (7.2), функции u_n^0 и v_n^0 пропорциональны одноэлектронным волновым функциям φ_n для нормального металла

$$\xi_n \varphi_n = \left[\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U - E_F\right] \varphi_n. \tag{7.4}$$

Именно

$$u_n^0 = \varphi_n, \quad v_n^0 = 0 \qquad (\xi_n > 0),$$
$$u_n^0 = 0, \quad v_n^0 = \varphi_n^* \qquad (\xi_n < 0) \tag{7.5}$$

и $\varepsilon_n^0 = |\xi_n|$. Поскольку везде $u_n^0 v_n^0 = 0$, в нулевом приближении правая часть уравнения (7.1) равна нулю.

Чтобы найти поправки первого порядка u_n^1 и v_n^1, разложим их в ряд по полной системе функций φ_n

$$u_n^1 = \sum_m e_{nm}\varphi_m,$$
$$v_n^1 = \sum_m d_{nm}\varphi_m^*. \tag{7.6}$$

Подставим (7.6) в (7.2), умножим первое уравнение на φ_m^*, а второе на φ_m и проинтегрируем по $\mathbf{r}$. Тогда система примет вид

$$(|\xi_n| - \xi_m)\, e_{nm} = \int \varphi_m^*(\mathbf{r})\,\Delta(\mathbf{r})\, v_n^0(\mathbf{r})\, d\mathbf{r},$$
$$(|\xi_n| + \xi_m)\, d_{nm} = \int \varphi_m(\mathbf{r})\,\Delta^*(\mathbf{r})\, u_n^0(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}. \tag{7.7}$$

Как обычно, диагональные члены типа e_{nn} следует приравнять нулю для сохранения условия нормировки $|u|^2 + |v|^2 = 1$.

Выделим в уравнении самосогласованности (7.1) члены первого порядка по Δ. Используя затем уравнения (7.6) и (7.7) для u_n^1 и v_n^1, получаем

$$\Delta(\mathbf{s}) = \int K(\mathbf{s}, \mathbf{r})\,\Delta(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \tag{7.8}$$

где

$$K(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = V \sum_{n,\,m} [1 - 2f(|\varepsilon_n|)] \times$$
$$\times \left[\frac{u_n^{0*}(\mathbf{r})\, u_n^0(\mathbf{s})}{|\xi_n| + \xi_m} + \frac{v_n^{0*}(\mathbf{s})\, v_n^0(\mathbf{r})}{|\xi_n| - \xi_m} \right] \varphi_m(\mathbf{s})\, \varphi_m^*(\mathbf{r}).$$

Входящие сюда функции u_n^0 (или v_n^0), согласно (7.5), отличны от нуля лишь для $\xi_n > 0$ (или $\xi_n < 0$). Функция $1 - 2f(\varepsilon_n) = \operatorname{th}(\beta\xi_n/2)$ нечетна по ξ_n. Это позволяет нам объединить члены типа uu и vv. Симметризуя, кроме того, выражение под знаком суммы по индексам n и m, окончательно напишем

$$K(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{V}{2} \sum_{n,\,m} \frac{\operatorname{th}(\beta\xi_n/2) + \operatorname{th}(\beta\xi_m/2)}{\xi_n + \xi_m} \varphi_n^*(\mathbf{r})\,\varphi_m^*(\mathbf{r})\,\varphi_n(\mathbf{s})\,\varphi_m(\mathbf{s}). \tag{7.9}$$

Иногда бывает удобно несколько преобразовать этот результат, воспользовавшись разложением

$$\operatorname{th}\left(\frac{\beta\xi}{2}\right)=2k_BT\sum_{\omega}\frac{1}{\xi-i\hbar\omega}, \tag{7.10}$$

где $\hbar\omega=2\pi k_BT(\nu+1/2)$, а суммирование производится по всем целым (положительным и отрицательным) числам ν. Тождество (7.10) легко проверить, сравнивая с обеих сторон положение полюсов в комплексной плоскости ξ и вычетов в них. [Заметим, что вместо минуса перед i в знаменателе в (7.10) можно поставить и плюс, поскольку величина ω при суммировании принимает оба знака.] Таким образом,

$$\frac{\operatorname{th}(\beta\xi/2)+\operatorname{th}(\beta\xi'/2)}{\xi+\xi'}=2k_BT\sum_{\omega}\frac{1}{\xi+\xi'}\left(\frac{1}{\xi-i\hbar\omega}+\frac{1}{\xi'+i\hbar\omega}\right)=$$

$$=2k_BT\sum_{\omega}\frac{1}{(\xi-i\hbar\omega)(\xi'+i\hbar\omega)}$$

и

$$K(\mathbf{s},\ \mathbf{r})=Vk_BT\sum_{\omega}\sum_{n,\,m}\frac{\varphi_n^*(\mathbf{r})\,\varphi_m^*(\mathbf{r})\,\varphi_n(\mathbf{s})\,\varphi_m(\mathbf{s})}{(\xi_n-i\hbar\omega)(\xi_m+i\hbar\omega)}. \tag{7.11}$$

Уравнение (7.8) вместе с явным выражением (7.11) для ядра представляет собой линеаризованное условие самосогласованности (7.1). Огромное преимущество уравнения (7.8) по сравнению с (7.1) состоит в том, что в него не входят функции u, v, а входит лишь единственная неизвестная функция $\Delta(\mathbf{r})$. Конечно, необходимо всегда помнить, что линеаризованная форма применима лишь при малых значениях Δ, т. е. в непосредственной близости к точке фазового перехода.

Выделение магнитных эффектов

Предположим, что вектор-потенциал $\mathbf{A}$ мало меняется в пространстве. Тогда собственные функции φ_n в нормальном металле при наличии вектора-потенциала $\mathbf{A}$ отличаются от собственных функций w_n (в отсутствие $\mathbf{A}$) лишь фазовым множителем

$$\varphi_n^*(\mathbf{r})\,\varphi_n(\mathbf{s})\to w_n(\mathbf{r})\,w_n(\mathbf{s})\,e^{ie\mathbf{A}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{r})/\hbar c}. \tag{7.12}$$

Функции w_n мы выбрали вещественными. Легко убедиться, что замена (7.12) совместима с уравнением (7.4) и с определением w_n, если полностью пренебречь пространственными изменениями вектора-потенциала $\mathbf{A}$. Остановимся подробнее на вопросе об области применимости сделанного приближения.

1. Позже мы увидим, что радиус действия ядра $K(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ в *чистом металле* имеет порядок $\xi_0 = 0{,}18(\hbar v_F/k_B T_c)$. Следовательно, вектор-потенциал должен мало меняться на таких расстояниях. Это означает, что поле $\mathbf{h}$ должно изменяться медленно; иными словами, глубина проникновения $\lambda_L(T)$ должна быть большой по сравнению с ξ_0:

$$\lambda_L(T) \gg \xi_0. \tag{7.13}$$

2. Наоборот, если поле $\mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ изменяется медленно, то отсюда не следует автоматически, что вектор-потенциал $\mathbf{A}$ также будет меняться медленно, поскольку на расстояниях $|\mathbf{s} - \mathbf{r}| \sim \xi_0$ последний может измениться на величину порядка $\xi_0 h$. Это дает следующую неопределенность в фазе:

$$\frac{e}{\hbar c}\, \xi_0 h \xi_0 \sim \frac{\hbar \omega_c E_F}{(k_B T_c)^2};$$

последняя величина должна быть мала по сравнению с единицей. Таким образом, мы приходим к еще одному условию

$$\frac{(k_B T_c)^2}{E_F} \gg \hbar \omega_c, \tag{7.14}$$

где $\omega_c = eh/mc$ — циклотронная частота электронов в нормальном металле в поле h. Для массивных сверхпроводников первого рода поле h самое большее может быть равно полю $H_c(T)$. Согласно (6.29), (6.25) и (6.19), для чистого металла

$$H_c \sim \frac{\phi_0}{\varkappa \xi_0^2} \frac{T_c - T}{T_c} \qquad (T \to T_c),$$

где $\varkappa$ — параметр Гинзбурга — Ландау, а $\phi_0 = hc/2e$ — квант потока. Тогда условие (7.14) можно записать в простом виде $(1 - T/T_c) < \varkappa$. Это условие менее жесткое, чем неравенство (7.13), которое можно записать в виде $(1 - T/T_c)^{1/2} < \varkappa$. Для сверхпроводников второго рода поле h имеет самое большее порядок поля $H_{c2} \sim (\phi_0/\xi_0^2)(1 - T/T_c)$. Условие (7.14) в этом случае принимает вид $(1 - T/T_c) \ll 1$.

3. Совершенно ясно, что замена (7.12) возможна только в тех случаях, когда радиус электронной орбиты $R = mcv_F/eh$ в поле h велик по сравнению с радиусом действия ядра $K(\mathbf{s}, \mathbf{r})$. Это условие позволяет пренебречь всеми эффектами, связанными с диамагнетизмом Ландау. Запишем требование $R \gg \xi_0$ в виде

$$\hbar \omega_c \ll k_B T_c; \tag{7.15}$$

последнее условие является менее жестким, чем (7.14).

Таким образом, мы приходим к выводу, что для чистых металлов замена (7.12) законна, если температура T достаточно близка к критической температуре T_c. Дальше мы увидим, как с помощью этой

замены можно непосредственно перейти к уравнениям Гинзбурга — Ландау. В „грязных" сплавах ситуация оказывается даже более благоприятной. Именно, линейное интегральное уравнение (7.8) *при всех температурах* можно заменить дифференциальным уравнением второго порядка, формально напоминающим линеаризованное уравнение Гинзбурга — Ландау.

Окончательно имеем

$$\Delta(\mathbf{s}) = \int d\mathbf{r} K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \exp\left[\frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{r})\right]\Delta(\mathbf{r}), \tag{7.16}$$

$$K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = Vk_BT\sum_{\omega}\sum_{n,m}\frac{w_n(\mathbf{r})\,w_m(\mathbf{r})\,w_n(\mathbf{s})\,w_m(\mathbf{s})}{(\xi_n - i\hbar\omega)(\xi_m + i\hbar\omega)}. \tag{7.17}$$

Бесконечная однородная среда

Чаще всего приходится рассматривать ядро K_0 для бесконечной однородной среды. Если эта среда представляет собой чистый металл, то ядро $K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})$, очевидно, будет зависеть лишь от разности $\mathbf{s}-\mathbf{r}$. Напротив, в сплавах трансляционная инвариантность отсутствует и, чтобы обеспечить ее, необходимо сделать дополнительные предположения. Усредним уравнение (7.16) по всевозможным конфигурациям примесей; тогда в его правой части появится среднее типа $\overline{K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})\Delta(\mathbf{r})}$. Аппроксимируем его следующим образом:

$$\overline{K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})\Delta(\mathbf{r})} \to \overline{K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})}\;\overline{\Delta(\mathbf{r})}. \tag{7.18}$$

Замена (7.18) не является вполне строгой, поскольку при этом мы пренебрегаем эффектами изменения потенциала спаривания Δ непосредственно вблизи каждой примеси. Подробные вычисления [92] показывают, однако, что такое приближение во всяком случае разумно, если потенциал примесей можно рассматривать как малое возмущение. Имея в виду это обстоятельство, мы будем считать, что компоненты сплава не слишком сильно отличаются в химическом отношении[1]). Тогда замена (7.18) законна, и интегральное уравнение для $\overline{\Delta(\mathbf{r})}$ можно записать через усредненное ядро $\overline{K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})}$, зависящее лишь от разности $\mathbf{s}-\mathbf{r}$.

Связь ядра K_0 с функцией корреляции

На первый взгляд может показаться, что наличие произведения четырех функций w_n в выражении (7.17) сильно затрудняет дальнейший анализ. Однако, как мы сейчас увидим, это произведение имеет довольно простой физический смысл. Рассмотрим для простоты

[1]) См. примечание 1 на стр. 159. — *Прим. ред.*

однородную бесконечную среду и перейдем к фурье-компонентам

$$K_0(\mathbf{q}) = L^{-3}\int d\mathbf{r}\, ds K_0(\mathbf{s}-\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{r})} = \\ = VL^{-3}k_BT\sum_{\omega,\, n,\, m}\frac{\langle n\,|\,e^{iqx}\,|\,m\rangle\langle m\,|\,e^{-iqx}\,|\,n\rangle}{(\xi_n - i\hbar\omega)(\xi_m + i\hbar\omega)}, \qquad (7.19)$$

где L^3 — объем образца, а вектор $\mathbf{q}$ направлен вдоль оси x. Входящие сюда матричные элементы определяются следующим образом:

$$\langle n\,|\,e^{iqx}\,|\,m\rangle = \int \psi_n(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\psi_m(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}.$$

Полезно обсудить сначала вещественную функцию

$$g(q,\,\Omega) = \sum_m \overline{\langle n\,|\,e^{iqx}\,|\,m\rangle\langle m\,|\,e^{-iqx}\,|\,n\rangle}\,\delta(\xi_m - \xi_n - \hbar\Omega), \qquad (7.20)$$

которую иногда называют *спектральной плотностью* одноэлектронного оператора e^{iqx}. Черта означает усреднение по всем состояниям с заданной энергией ξ_n (уровню Ферми отвечает $\xi_n = 0$). Функция $g(q,\,\Omega)$ сильно зависит от Ω и слабо — от ξ_n, так что фактически усреднение производится при энергии, равной фермиевской. Зная g, можно сразу написать выражение для ядра

$$K_0(q) = N(0)Vk_BT\sum_\omega \int \frac{d\xi\, d\xi' g[q,\,(\xi-\xi')/\hbar]}{(\xi - i\hbar\omega)(\xi' + i\hbar\omega)}. \qquad (7.21)$$

Функция $g(q,\,\Omega)$ имеет простой физический смысл. Введем гейзенберговский оператор

$$e^{iqx(t)} = e^{i\mathscr{H}_e t/\hbar} e^{iqx} e^{-i\mathscr{H}_e t/\hbar}, \qquad (7.22)$$

описывающий изменение во времени оператора e^{iqx} для электрона в нормальном металле в отсутствие примесей; $\mathscr{H}_e$ — гамильтониан одного электрона:

$$\mathscr{H}_e = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}).$$

В терминах оператора $e^{iqx(t)}$ спектральная плотность принимает следующий простой вид:

$$g(q,\,\Omega) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dt e^{i\Omega t}\overline{\langle n\,|\,e^{-iqx(0)}e^{iqx(t)}\,|\,n\rangle}. \qquad (7.23)$$

Соотношения (7.23) легко проверить, если выписать в явном виде матричные элементы оператора $e^{iqx(t)}$ между состояниями n и m.

Таким образом, для вычисления спектральной плотности g необходимо знать функцию корреляции оператора e^{iqx}, т. е. функцию

$$\langle e^{-iqx(0)}e^{iqx(t)}\rangle_{E_F} = \overline{\langle n\,|\,e^{-iqx(0)}e^{iqx(t)}\,|\,n\rangle} \qquad (7.24)$$

для электрона, находящегося на уровне Ферми в нормальном металле.

1. *Чистый металл.* Предположим, что при $t=0$ электрон находится в точке x_0 на оси x и имеет вдоль этой оси компоненту скорости $v_F\cos\theta$ (θ — угол между $\mathbf{q}$ и направлением скорости электрона). Тогда

$$e^{-iqx(0)}=e^{-iqx_0},$$

$$e^{iqx(t)}=e^{iq(x_0+v_Ft\cos\theta)}.$$

Следовательно,

$$\langle e^{-iqx(0)}e^{iqx(t)}\rangle_{E_F}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta e^{iqv_Ft\cos\theta} \tag{7.25}$$

и

$$g(q,\ \Omega)=\frac{1}{2\hbar}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\delta(\Omega-qv_F\cos\theta)=\begin{cases}(2qv_F\hbar)^{-1}, & |\Omega|<qv_F,\\ 0, & |\Omega|>qv_F.\end{cases} \tag{7.26}$$

2. *„Грязный" металл.* Для „грязного" металла, в котором длина свободного пробега l мала по сравнению с характерной длиной волны q^{-1}, изменение оператора $e^{iqx(t)}$ со временем происходит по закону случайных блужданий. В этом случае при $ql\ll 1$

$$\langle e^{-iqx(0)}e^{iqx(t)}\rangle_{E_F}=e^{-Dq^2|t|},$$
$$g(q,\ \Omega)=\frac{1}{\pi\hbar}\frac{Dq^2}{\Omega^2+D^2q^4}, \tag{7.27}$$

где $D=lv_F/3$ — коэффициент диффузии.

Явное выражение для ядра K_0

Исходя из (7.21) и используя выражения (7.26) и (7.27) для $g(q, \Omega)$, легко найти явный вид ядра $K_0(q)$. Выберем в качестве переменных интегрирования ξ и $\hbar\Omega=\xi'-\xi$; интегрирование по ξ легко выполняется с помощью теории вычетов. В результате для чистого металла получаем

$$K_0(q)=\frac{N(0)Vk_BT\pi}{qv_F\hbar}\sum_{\omega}\int_{-qv_F}^{qv_F}\frac{d\Omega}{2\omega-i\Omega}=$$

$$=\frac{2\pi N(0)Vk_BT}{\hbar qv_F}\sum_{\omega}\operatorname{arctg}\left(\frac{qv_F}{2|\omega|}\right). \tag{7.28a}$$

Аналогично в случае „грязного“ металла

$$K_0(q) = N(0)\,Vk_BT\,\frac{2i}{\hbar}\sum_{\omega}\int d\Omega\,\frac{Dq^2}{(Dq^2+i\Omega)(2i\omega+\Omega)} =$$

$$= \frac{N(0)\,Vk_BT}{\hbar}\sum_{\omega}\frac{1}{Dq^2+2|\omega|} \quad \text{при} \quad ql \ll 1. \qquad (7.28б)$$

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Обрезание взаимодействия V по частоте. До сих пор мы пренебрегали тем обстоятельством, что взаимодействие V в приближении БКШ связывает лишь состояния с энергиями $|\xi| < \hbar\omega_D$. Это приводит к тому, что суммы (7.28) расходятся. Последнее, однако, легко исправить, записав

$$K_0(q) = K_0(0) + [K_0(q) - K_0(0)]. \qquad (7.29)$$

Здесь расходящимся является лишь первый член $K_0(0)$, который легко вычисляется с помощью (7.17)

$$K_0(0) = \sum_n V\,\frac{\operatorname{th}(\beta\xi_n/2)\,|\,w_n(\mathbf{r})\,|^2}{2\xi_n} =$$

$$= N(0)\,V\int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D}\frac{d\xi}{2\xi}\operatorname{th}\left(\frac{\beta\xi}{2}\right) = N(0)\,V\ln\frac{1{,}14\hbar\omega_D}{k_BT}. \qquad (7.30)$$

При выводе этой формулы мы выполнили интегрирование по s, воспользовавшись ортогональностью функций $w_n(\mathbf{s})$ [1]).

2. Пространственная зависимость ядра K_0. Совершая обратное преобразование Фурье, находим из (7.28)

$$K_0(\mathbf{s},\mathbf{r}) = K_0(\mathbf{R}) = \begin{cases} \dfrac{N(0)\,Vk_BT}{2\hbar v_F}\displaystyle\sum_{\omega}\frac{1}{R^2}e^{-2|\omega|R/v_F} & (R \ll l), \qquad (7.31а) \\ \dfrac{N(0)\,Vk_BT}{2\hbar D}\displaystyle\sum_{\omega}\frac{1}{R}e^{-R\sqrt{2|\omega|/D}} & (R \gg l), \qquad (7.31б) \end{cases}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{s} - \mathbf{r}$. При $R \neq 0$ суммы сходятся.

Особый интерес представляет асимптотическое поведение ядра $K_0(R)$ на больших расстояниях. Для таких расстояний важный вклад в сумму по ω

[1]) С результатом (7.30) мы уже сталкивались при рассмотрении более простого случая, а именно бесконечного однородного сверхпроводника в отсутствие полей и токов, когда параметр $\Delta(\mathbf{r})$ можно считать постоянным во всем пространстве. Тогда линеаризованное уравнение самосогласованности принимает особенно простой вид $\Delta = K_0(0)\,\Delta$. Его нетривиальное решение $\Delta \neq 0$ существует лишь при выполнении условия $K_0(0) = 1$, определяющего критическую температуру T_c сверхпроводника.

дают только члены с $\hbar\omega = \pm \pi k_B T$ ($\approx \pm \pi k_B T_c$). Таким образом, при $T = T_c$

$$\frac{K_0(R)}{N(0)V} = \frac{k_B T_c}{2\hbar v_F}\frac{1}{R^2} e^{-2\pi k_B T_c R/\hbar v_F} = \frac{k_B T_c}{2\hbar v_F}\frac{1}{R^2} e^{-1{,}13R/\xi_0} \quad \text{при } \xi_0 \ll R \ll l, \tag{7.32а}$$

$$\frac{K_0(R)}{N(0)V} = \frac{k_B T_c}{\hbar D}\frac{1}{R} e^{-(6\pi k_B T_c/v_F l)^{1/2} R} = \frac{k_B T_c}{\hbar D R} e^{-1{,}8R/\sqrt{\xi_0 l}} \quad \text{при } R \gg \sqrt{l\xi_0}. \tag{7.32б}$$

ВЫВОД

Для чистого металла при $T \approx T_c$ радиус действия ядра $K_0(R)$ составляет $\sim \xi_0 = 0{,}18\,(\hbar v_F/k_B T_c)$, как уже упоминалось выше. Если же пробег l мал, то соотношение (7.32б) дает для радиуса действия величину $\sim \sqrt{\xi_0 l}$. Применимость соотношения (7.32б) ограничена условием $R \gg l$, откуда следует $(\xi_0 l)^{1/2} \gg l$, или

$$\xi_0 \gg l. \tag{7.33}$$

По терминологии, введенной Андерсоном, сплавы, для которых выполняется неравенство (7.33), называются *„грязными"*. Если матрица сплава является непереходным металлом с большой величиной ξ_0 (например, для алюминия $\xi_0 = 1{,}6 \cdot 10^4$ Å), то небольшой доли примесей ($\sim 10^{-3}$) достаточно, чтобы сделать металл „грязным" [1]).

Представляет также интерес сравнить K_0 с ядром $S_{\mu\nu}$ (см. гл. V), определяющим ток, который возникает в сверхпроводнике при наличии вектора-потенциала **A**. Мы знаем, что радиус действия ядра $S_{\mu\nu}$ в „грязном" сплаве имеет порядок l, в то время как для K_0 эта величина составляет $\sim \sqrt{\xi_0 l}$.

Чтобы понять причину такого отличия, выразим оба ядра $S_{\mu\nu}$ и K_0 через усредненные одноэлектронные функции корреляции в нормальном металле в отсутствие полей

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\int d\xi\, d\xi' \int \frac{dt}{2\pi} L(\xi, \xi')\, e^{i(\xi-\xi')t/\hbar} \langle j_\mu(\mathbf{r}_1, 0)\, j_\nu(\mathbf{r}_2, t)\rangle_{E_F}, \tag{7.34}$$

$$K_0 = \frac{1}{2} N(0) V \int d\xi\, d\xi' \left[\frac{\mathrm{th}\,(\beta\xi/2) + \mathrm{th}\,(\beta\xi'/2)}{\xi + \xi'}\right] \times$$
$$\times \int \frac{dt}{2\pi}\, e^{i(\xi-\xi')t/\hbar} \langle \delta[\mathbf{r}(0) - \mathbf{r}_1]\, \delta[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_2]\rangle_{E_F}, \tag{7.35}$$

где $\langle j_\mu j_\nu\rangle$ — функция корреляции поперечного тока, а $\langle \delta\delta\rangle$ — функция корреляции плотности.

Соотношения (7.34) и (7.35) легко проверить, явно вычисляя матричные элементы, появляющиеся в произведениях типа $j_\mu j_\nu$. Из-за интегрирований

[1]) В обычных сплавах физические явления (такие, например, как переход чистого сверхпроводника первого рода в категорию сплавов второго рода) разыгрываются при $l \sim \delta$, где δ — глубина проникновения. Напомним, что обычно $\delta \ll \xi_0$ у большинства металлов. — *Прим. ред.*

по ξ и ξ' в (7.34) и (7.35) при $T \approx T_c$ в окончательный результат существенный вклад дает интервал $t \sim \hbar/k_B T_c$. В отсутствие соударений за время t электрон проходит расстояние $v_F t \sim \xi_0$, поэтому оба ядра $S_{\mu\nu}$ и K_0 имеют радиус действия порядка ξ_0. Если же сплав является „грязным", то функция корреляции скорости быстро спадает до нуля при прохождении электроном расстояния $\sim l$, т. е. характерный радиус ядра $S_{\mu\nu} \sim l$. На таких расстояниях функция корреляции плотности еще отлична от нуля. Согласно уравнению диффузии, средний путь, проходимый электронами за время t, равен $\sim \sqrt{Dt}$ ($D = lv_F/3$ — коэффициент диффузии), поэтому радиус действия ядра K_0 составляет $\sim \sqrt{Dt} \sim \sqrt{\xi_0 l}$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ

Введение нелинейных членов в уравнение самосогласованности

Линеаризованное уравнение самосогласованности (7.8) для потенциала спаривания применимо лишь для бесконечно малых значений параметра Δ, т. е. в самой точке перехода (при условии, что изучаемый переход является фазовым переходом *второго рода*, т. е. параметр Δ непрерывно уменьшается до нуля при повышении температуры). Обозначим через T^* наивысшую температуру, при которой уравнение (7.8) впервые обладает нетривиальным решением $\Delta(\mathbf{r})$, т. е. имеет место фазовый переход. Температура T^* определяется условиями опыта. Например, для массивного сверхпроводника второго рода, помещенного во внешнее поле H, температура T^* определяется уравнением $H_{c2}(T^*) = H$. В дальнейшем мы обсудим этот вопрос более подробно. Сейчас перед нами стоит несколько иная задача. Мы хотим обобщить предыдущий анализ на случай температур, близких к критической ($T < T^*$). Для этого нужно учесть нелинейные члены в разложении правой части уравнения (7.1) в ряд по Δ. Вычисляя u и v с точностью до членов более высокого порядка по Δ, аналогично предыдущему получаем

$$\Delta(\mathbf{s}) = \int K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})\, e^{2ie\,|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{r})|/\hbar c}\, \Delta(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} + \\ + \int R(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{m})\, \Delta^*(\mathbf{r})\, \Delta(\mathbf{l})\, \Delta(\mathbf{m})\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{l}\, d\mathbf{m}. \qquad (7.36)$$

Следует отметить, что в написанном разложении отсутствуют члены порядка Δ^2. Явный вид ядра $R(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ можно вычислить; здесь необходимо помнить лишь одно его важное свойство: в чистом металле область действия ядра R имеет размеры $\sim \xi_0$. Иными словами, при интегрировании по $\mathbf{r}$, $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ в последнем члене основной вклад дают такие точки $\mathbf{r}$, $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$, которые одновременно близки к точке $\mathbf{s}$. В сплавах область интегрирования еще больше сокращается. Это позволяет нам избежать подробных вычислений ядра R.

Гипотеза о медленности изменений

Предположим, что величины типа $\Delta(\mathbf{r})\exp[-2ie\mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{s})/\hbar c]$ медленно меняются на расстояниях порядка радиуса действия ядер K_0 и R; это определяет область применимости уравнений Гинзбурга — Ландау. Разложим функцию $\Delta(\mathbf{r})\exp[-2ie\mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{s})/\hbar c]$ в ряд Тейлора вблизи точки $\mathbf{s}$:

$$\Delta(\mathbf{r})\,e^{-2i\varphi(\mathbf{r})}=\Delta(\mathbf{s})\,e^{-2i\varphi(\mathbf{s})}+(\mathbf{r}-\mathbf{s})\cdot\nabla(\Delta e^{-2i\varphi})+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{s})_\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{s})_\beta\,\nabla_\alpha\nabla_\beta(\Delta e^{-2i\varphi}),$$

где введен фазовый параметр

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}.$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\Delta(\mathbf{r})\,e^{-2i\varphi(\mathbf{r})}=e^{-2i\varphi(\mathbf{s})}\left\{\Delta(\mathbf{s})+\sum_\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{s})_\alpha\delta_\alpha\Delta+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{s})_\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{s})_\beta\,\delta_\alpha\delta_\beta\Delta\right\},\qquad(7.37)$$
$$\delta_\alpha=\left[\frac{\partial}{\partial s}-\frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{s})\right]_\alpha.$$

Подставим разложение (7.37) в линейный член уравнения (7.36); для члена, кубического по Δ, с хорошей точностью можно полностью пренебречь пространственной зависимостью Δ и положить $\Delta(\mathbf{r})=\Delta(\mathbf{l})=\Delta(\mathbf{m})=\Delta(\mathbf{s})$. Наконец, для бесконечного однородного металла члены типа $\int K_0(\mathbf{r}-\mathbf{s})(\mathbf{r}-\mathbf{s})\,d\mathbf{r}$ обращаются в нуль в силу симметрии. Таким образом, приходим к уравнению

$$\Delta(\mathbf{s})=Q\Delta(\mathbf{s})+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}L_{\alpha\beta}\delta_\alpha\delta_\beta\Delta(\mathbf{s})+R|\Delta(\mathbf{s})|^2\Delta(\mathbf{s}),\qquad(7.38)$$

где

$$Q=\int K_0(\mathbf{s}-\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$
$$L_{\alpha\beta}=\int K_0(\mathbf{s}-\mathbf{r})(\mathbf{s}_\alpha-\mathbf{r}_\alpha)(\mathbf{s}_\beta-\mathbf{r}_\beta)\,d\mathbf{r},\qquad(7.39)$$
$$R=\int R(\mathbf{s},\ \mathbf{r},\ \mathbf{l},\ \mathbf{m})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{l}\,d\mathbf{m}.$$

Для кубического кристалла $L_{\alpha\beta}=L\delta_{\alpha\beta}$; в этом случае уравнение (7.38) совпадает с уравнением Гинзбурга—Ландау (6.11). Введенные здесь коэффициенты Q, L и R связаны с коэффициентами A, B и C

выражения (6.7) следующим соотношением:

$$\frac{-Q+1}{A}=\frac{R}{B}=\frac{1}{2}\frac{L}{C}. \tag{7.40}$$

Обсуждение коэффициентов

Коэффициенты A и B для случая, когда $\mathbf{A}=0$ и $\Delta=\text{const}$, были определены ранее [см. (6.3)]. Аналогичным образом можно найти численные значения коэффициентов Q и R. Мы знаем, что $\Delta=\text{const}$ при $\mathbf{A}=0$; в этом случае уравнение самосогласованности (7.1) принимает вид

$$\Delta=N(0)V\int_0^{\hbar\omega_D}\Delta\frac{\operatorname{th}(\beta\varepsilon/2)}{\varepsilon}d\xi,$$
$$\varepsilon=(\xi^2+\Delta^2)^{1/2}. \tag{7.41}$$

Согласно теореме Андерсона (см. гл. V), уравнение (7.41) применимо как к чистым металлам, так и к сплавам. Разлагая правую часть этого уравнения в ряд по Δ и выполняя интегрирование, получаем

$$Q=N(0)V\ln\frac{1{,}14\,\hbar\omega_D}{k_BT}\approx 1+N(0)V\left(1-\frac{T}{T_c}\right),$$
$$R=-0{,}098\,\frac{N(0)V}{(k_BT_c)^2}. \tag{7.42}$$

Наибольший интерес представляет коэффициент L, описывающий влияние пространственных изменений параметра Δ. С помощью явного выражения (7.31) для ядра K_0 находим, что для чистого металла

$$L=\frac{\pi}{6}N(0)Vv_F^2k_BT_c\sum_\omega\frac{1}{|\omega|^3}=0{,}033N(0)V\left(\frac{\hbar v_F}{k_BT_c}\right)^2,\quad l\gg\xi_0. \tag{7.43а}$$

Для „грязного“ металла

$$L=\pi N(0)VD\frac{k_BT_c}{\hbar}\sum_\omega\frac{1}{\omega^2}=\frac{\pi}{12}N(0)V\frac{\hbar v_Fl}{k_BT_c},\quad l\ll\xi_0. \tag{7.43б}$$

[Суммирование по ω в (7.43а) должно выполняться численно; для вычисления суммы в (7.43б) достаточно продифференцировать тождество (7.10) по ξ и затем положить $\xi=0$.]

Эти результаты позволяют получить ряд полезных соотношений.

1. Коэффициент C в выражении (6.7) для свободной энергии имеет вид

$$C=\frac{L}{2}\frac{A}{1-Q}=\frac{1}{2}\frac{L}{V}. \tag{7.44}$$

2. Характерную длину $\xi(T)$, входящую в уравнение Гинзбурга — Ландау (6.18) в отсутствие поля, можно получить, сравнивая (6.17) и (6.8):

$$\xi(T)=\left[\frac{L}{2(Q-1)}\right]^{1/2}. \tag{7.45}$$

В согласии с (6.19) она расходится как $(1-T/T_c)^{-1/2}$ при $T\to T_c$.

3. Параметр Гинзбурга — Ландау $\varkappa$, по определению [см. (6.26)], равен

$$\varkappa=\frac{1}{4}\left(\frac{B}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{\hbar c}{eC}. \tag{7.46}$$

Для чистого металла отсюда следует вышеприведенный результат: $\varkappa=0{,}96\lambda_L(0)/\xi_0$. Для „грязного" металла

$$\varkappa=0{,}75\,\frac{\lambda_L(0)}{l}, \quad l\ll\xi_0, \tag{7.47}$$

где

$$\lambda_L(0)=\left(\frac{mc^2}{4\pi ne^2}\right)^{1/2}$$

— лондоновская глубина проникновения для чистого металла при $T=0$.

Результат (7.47) можно представить в другом виде, введя вместо l и $\lambda_L(0)$ величины, непосредственно измеримые на опыте с нормальными металлами. Длина свободного пробега l связана с удельным сопротивлением ρ соотношением [1])

$$\rho^{-1}=2e^2N(0)D=\frac{2}{3}N(0)e^2v_Fl. \tag{7.48}$$

Далее, лондоновская глубина проникновения равна [2])

$$\lambda_L(0)=\left(\frac{3c^2}{8\pi N(0)v_F^2e^2}\right)^{1/2}. \tag{7.49}$$

---

[1]) Плотность тока $\mathbf{j}$ в нормальном металле дается выражением $\mathbf{j}=-eD\nabla n+\mathbf{E}/\rho$, где n — число электронов в 1 $см^3$. В состоянии равновесия $n=n_0-2N(0)eV$, где V — потенциал электрического поля $\mathbf{E}=-\nabla V$. Отсюда, полагая $\mathbf{j}=0$, получаем соотношение (7.48).

[2]) При наличии статического вектора-потенциала $\mathbf{A}$ сфера Ферми в импульсном пространстве испытывает смещение как целое на величину $\delta\mathbf{p}=e\mathbf{A}/c$, что приводит к появлению тока с плотностью

$$\mathbf{j}=e\sum_{\mathbf{p}}\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}}\cdot\delta\mathbf{p}\right)\mathbf{v}_{\mathbf{p}},$$

где f — функция распределения электронов. После несложных вычислений находим

$$\mathbf{j}=-\frac{2e^2}{3c}N(0)v_F^2\mathbf{A} \quad (T=0).$$

Отсюда непосредственно следует выражение (7.49) для $\lambda_L(0)$.

Наконец, выразив плотность состояний $N(0)$ через электронную часть теплоемкости C_{en} при низких температурах (отнесенную к единице объема)

$$C_{en} = \gamma T,$$

$$\gamma = \frac{2\pi^3}{3} N(0) k_B^2,$$

окончательно получим

$$\frac{\lambda_L(0)}{l} = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{ce}{k_B} \rho \gamma^{1/2}. \tag{7.50}$$

Выражая ρ в $ом^{-1} \cdot см^{-1}$ вместо единиц CGS, получаем

$$\varkappa = 7{,}5 \cdot 10^7 \rho \gamma^{1/2}, \quad l \ll \xi_0. \tag{7.51}$$

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО „ГРЯЗНЫХ" СПЛАВОВ

1. Согласно (7.47), параметр $\varkappa$ для сплава зависит только от l, т. е. определяется транспортными свойствами системы в нормальном состоянии.

2. Если исходный чистый металл является сверхпроводником первого рода ($\varkappa \ll 1$), то сплав представляет собой сверхпроводник второго рода ($\varkappa > 1/\sqrt{2}$), когда длина свободного пробега l меньше критического значения $l_c = 1{,}06\lambda_L(0)$. Этот закон был проверен в опытах Серафима и др. [116] на индии [$\lambda_L(0) \sim 400$Å] с различным содержанием примесей. Критическая концентрация сильно зависит от рода используемой примеси (например, для Tl она равна 7%, а для Bi всего лишь 0,8%), однако значение l_c при этом остается почти неизменным ($l_c = 440 \pm 100$Å для Bi, Pb, Sn, Cd, Tl и Hg).

3. Для сплава InBi (2,5% Bi) из магнитных измерений Кинсела и др. [114] следует, что $\varkappa = 1{,}79$. Теоретическая оценка по формуле (7.51) дает $\varkappa \approx 1{,}7$. Основные параметры чистых и „грязных" металлов сопоставляются в табл. 5.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Все предыдущее рассмотрение касалось только первого уравнения Гинзбурга — Ландау, т. е. уравнения самосогласованности (6.11) для $\Delta(\mathbf{r})$ [или $\psi(\mathbf{r})$]. Чтобы завершить микроскопический анализ, нужно было бы вычислить также плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в произвольной точке $\mathbf{r}$ и показать, что она описывается выражением типа (6.12). Это можно проделать совершенно аналогично предыдущему, выражая $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ через u и v и разлагая полученное выражение в ряд до членов второго порядка по Δ. Мы не привели здесь этого расчета, поскольку он не дает ничего нового; все три коэффициента A, B и C в выражении для свободной энергии (6.7) уже известны и мы могли бы изучать непосредственно выражение для свободной энергии. В принципе оба подхода совершенно эквивалентны. Мы предпочли, имея в виду дальнейшие применения, обсудить уравнение самосогласованности для Δ.

Таблица 5

Основные параметры чистого и «грязного» металлов

	Чистый металл	«Грязный» металл
Радиус действия ядра $S_{\mu\nu}$, связывающего ток с вектором-потенциалом	$\xi_0 = 0{,}18\dfrac{\hbar v_F}{k_B T_c}$	l
Радиус действия ядра K_0, входящего в уравнение самосогласованности для $\Delta(\mathbf{r})$	$\sim \xi_0$	$\sim (\xi_0 l)^{1/2}$
Масштаб пространственных изменений $\lvert\Delta\rvert$ в области применимости уравнений Гинзбурга — Ландау	$\xi(T) = 0{,}74\xi_0\left(1 - \dfrac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$	$\xi(T) = 0{,}85\sqrt{\xi_0 l}\left(1 - \dfrac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$
Глубина проникновения в области применимости уравнений Гинзбурга — Ландау	$\lambda(T) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\lambda_L(0)\left(1 - \dfrac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$	$\lambda(T) = 0{,}64\lambda_L(0)\sqrt{\dfrac{\xi_0}{l}} \times \left(1 - \dfrac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$

Задача. Вывести уравнение Гинзбурга — Ландау для тонкой пленки ($d \ll \xi_0$) в случае диффузного отражения электронов от границ.

Решение. Вообще говоря, ответа на поставленный вопрос не существует — уравнения Гинзбурга — Ландау применимы не всегда [1]). Например, эффективный параметр $\varkappa$ может зависеть от угла между магнитным полем и плоскостью пленки. Хуже того, он мог бы зависеть от отношения $d/\lambda(T)$, которое в свою очередь сильно изменяется с температурой.

[1]) См. примечание на стр. 194. — *Прим. ред.*

Существует, тем не менее, один случай, когда можно построить двумерное уравнение Гинзбурга — Ландау, имеющее вполне определенный смысл. Для этого должны выполняться два условия. 1) Амплитуда параметра Δ постоянна по толщине пленки. Это условие выполняется, если $d < \xi_0$, т. е.

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2ie}{\hbar c} A_z\right) \Delta \to 0$$

(где z — направление нормали к пленке). 2) Изменение вектора-потенциала $\mathbf{A}$ по толщине пленки пренебрежимо мало. Это означает, что поле должно быть перпендикулярно пленке и что толщина пленки должна быть меньше некоторой эффективной глубины проникновения (см. ниже). Вместе с тем величины Δ и $\mathbf{A}$ могут медленно изменяться лишь в плоскости пленки (плоскость xy). Тогда свободная энергия имеет вид

$$F = A|\Delta|^2 + \frac{B}{2}|\Delta|^4 + C\left\{\left|\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2ie}{\hbar c} A_x\right)\Delta\right|^2 + \left|\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2ie}{\hbar c} A_y\right)\Delta\right|^2\right\}.$$

Чтобы найти коэффициент C, будем исходить из линеаризованного уравнения самосогласованности (7.16). Рассмотрим фурье-компоненту ядра $K_0(q)$, где q — вектор в плоскости xy. Для малых толщин ($d \ll \xi_0$) бóльшая часть электронов испытывает несколько соударений со стенками за время $\hbar/k_B T_c$. Поэтому функция $g(\mathbf{q}, \Omega)$ описывается уравнением диффузии, как и в случае „грязного" сверхпроводника [1]). Вычисления вполне аналогичны приведенным при выводе (7.43) и (7.44). В результате получаем

$$C = \frac{\pi}{8} N(0) \frac{\hbar D}{k_B T_c}.$$

Здесь коэффициент диффузии D составляет $\sim v_F d$ вместо прежнего значения $v_F l/3$. Удобно выразить его через электропроводность $\bar{\sigma}$ пленки, которую можно найти из измерений в нормальном состоянии. Согласно (7.48),

$$\bar{\sigma} = 2e^2 N(0) D,$$

$$C = \frac{\pi}{16e^2} \frac{\hbar\bar{\sigma}}{k_B T_c}.$$

Теоретический расчет $\bar{\sigma}$ можно найти, например, в книге Олсена [117]. На практике, безусловно, предпочтительнее брать экспериментальные значения $\bar{\sigma}$ для той же самой пленки в нормальном состоянии.

---

[1]) Имеется небольшая доля электронов, которые не испытывают соударений с границами, так как их скорости лежат в плоскости пленки. Оказывается, что их можно включить в рассмотрение строго. Однако для простоты мы будем здесь считать, что в объеме пленки также присутствуют примеси, следовательно, $l \lesssim \xi_0$, но $l > d$ (l — длина свободного пробега в массивном материале). При таких условиях вкладом от этих „аномальных" электронов можно пренебречь.

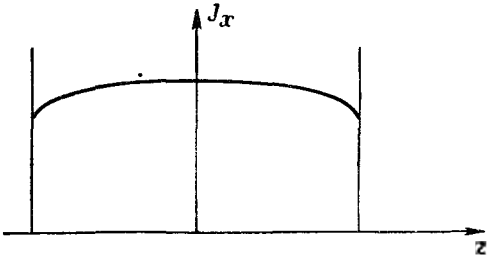
ОБСУЖДЕНИЕ

1. По порядку величины электропроводность $\bar{\sigma}$ равна ne^2d/mv_F, поэтому $C \sim N(0)\xi_0 d$ и $\varkappa \sim \lambda_L(0)/d$.

2. Зная коэффициент C, мы можем написать выражение для плотности тока (в направлении оси x)

$$j_x = \frac{2eC}{i\hbar}\left(\Delta^* \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \Delta \frac{\partial \Delta^*}{\partial x}\right) - \frac{8e^2C}{\hbar c} A_x.$$

Подчеркнем, что даже для малых толщин d истинное распределение плотности тока $j_x(z)$ по толщине пленки неоднородно (фиг. 58). Написанное выражение для тока представляет собой результат усреднения функции $j_x(z)$ по толщине пленки.



Фиг. 58. Распределение тока по сечению тонкой пленки ($d < \xi_0$) для случая диффузного отражения электронов от поверхности.

3. Хотя плотность тока $j_x(z)$ меняется по толщине, вектор-потенциал $\mathbf{A}$ с хорошей точностью можно считать не зависящим от z. Действительно с помощью уравнения Максвелла

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{c} j_x(z)$$

легко показать, что в том случае, когда A_x является четной функцией z, относительное изменение величины A_x по толщине составляет $\sim d^3/\xi_0\lambda^2 \ll 1$.

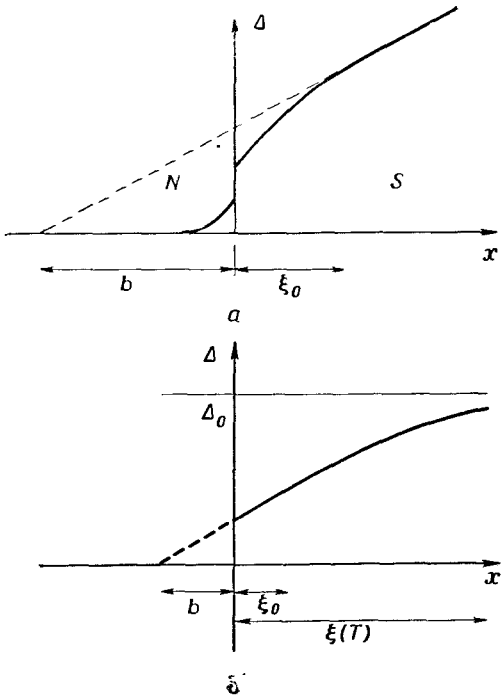
§ 3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

Граничные условия на поверхности раздела

В § 2, исходя из микроскопической теории, мы получили уравнения Гинзбурга — Ландау для бесконечной однородной среды. Рассмотрим теперь сверхпроводящий образец, занимающий полупространство $x \geqslant 0$; область $x < 0$ занята либо диэлектриком, либо

нормальным металлом. В обоих случаях будем предполагать отсутствие токов через границу раздела [1]).

Очевидно, в пределах расстояния ξ_0 от границы раздела выражения для ядер $K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ должны быть видоизменены [2]).



Фиг. 59. Поведение параметра порядка Δ вблизи границы раздела сверхпроводника (S) и нормального металла (N).

а — результат микроскопического рассмотрения; *б* — макроскопическое описание той же ситуации при температурах, близких к критической, когда $\xi(T) \gg b$.

Наша задача состоит в том, чтобы с помощью микроскопической теории найти эти видоизменения, а затем рассчитать пространственное распределение плотности тока $\mathbf{j}$ и параметра порядка Δ в воз-

[1]) В том случае, когда в образце одновременно существуют нормальные и сверхпроводящие токи, возникают процессы диссипации, которые должны вычисляться с помощью более общих уравнений, чем уравнения Гинзбурга — Ландау.

[2]) Приведенная оценка относится к чистому металлу. В „грязных" сплавах ширина „области перехода", очевидно, уменьшится до величины порядка $\sqrt{\xi_0 l}$.

мущенном слое вблизи границы. Поведение Δ качественно показано на фиг. 59, *а*. С другой стороны, на расстояниях порядка $\xi(T)$ или $\lambda(T)$, на которых применима теория Гинзбурга — Ландау [$\xi(T), \lambda(T) \gg \gg \xi_0$], влияние поверхности образца легко учесть, введя новый тип граничного условия при $x=0$ (фиг. 59, *б*). В случае когда $\mathbf{A}=0$, а параметр Δ вещественен, это граничное условие можно записать в виде следующего ряда:

$$\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{b}\Delta_{x=0} + \frac{1}{c}\frac{\Delta^3_{x=0}}{(k_B T_c)^2} + \ldots. \tag{7.52}$$

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ФОРМУЛЫ (7.52) [1].

1. Из общего вида уравнения самосогласованности следует, что разложение (7.52) может содержать только нечетные степени Δ. Кроме того, длины b, c и т. д. должны быть вещественными.

2. Производные более высокого порядка в разложении (7.52) можно не рассматривать, поскольку с помощью уравнений Гинзбурга — Ландау их можно выразить через первую производную и саму функцию.

3. Можно ожидать, что нелинейные эффекты становятся существенными при $\Delta \sim k_B T_c$ (коэффициенты $1/b$, $1/c$ и т. д., вообще говоря, имеют одинаковый порядок величины $\lesssim 1/\xi_0$). Вблизи T_c отношение члена порядка Δ^3 к члену порядка Δ составляет $\sim(\Delta/k_B T_c)^2 \ll 1$. Таким образом, в области применимости теории Гинзбурга — Ландау вторым членом в (7.52) можно пренебречь и граничное условие становится *линейным*. Для определения коэффициента b нужно решить уравнение самосогласованности (7.8) вблизи поверхности (при $T=T_c$ и $\mathbf{A}=0$). При наличии магнитного поля вместо (7.52) можно написать

$$\left(\frac{d\Delta}{dx} - \frac{2ie}{\hbar c}A_x\Delta\right)_{x=0} = \frac{\Delta_{x=0}}{b}. \tag{7.53}$$

Граничное условие вида (7.53) обеспечивает градиентную инвариантность, которая должна иметь место в соответствии с общими соображениями, приведенными в гл. V. В условии (7.53) параметр Δ можно заменить пропорциональной ему функцией ψ. С помощью (7.53) легко также убедиться в том, что при вещественном значении коэффициента b ток (6.12), текущий через границу раздела, равен нулю, как и предполагалось с самого начала.

---

[1]) Микроскопический вывод граничных условий для контакта нормального металла со сверхпроводником содержится в работах Зайцева [118]. — *Прим. ред.*

Контакт сверхпроводника с диэлектриком (или вакуумом)

Покажем, что в том случае, когда сверхпроводник граничит с диэлектриком, коэффициент $1/b$ мал. Задача состоит в решении уравнения

$$\Delta(\mathbf{s}) = \int K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})\Delta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \tag{7.54}$$

при $\mathbf{A}=0$, $T=T_c$. Из выражения (7.17) для ядра $K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ следует, что параметр $\Delta(\mathbf{s})$ содержит произведение двух функций $[w_n(\mathbf{s})$ и $w_m(\mathbf{s})]$, которые убывают экспоненциально при удалении от границы внутрь диэлектрика. Следовательно, величина $\Delta(\mathbf{s})$ мала при $s_x < 0$.

Напротив, в области $s_x > \xi_0$ функция $\Delta(\mathbf{s})$ линейно возрастает при удалении от границы [1])

$$\Delta(\mathbf{s}) = \Delta_0\left(1+\frac{s_x}{b}\right). \tag{7.55}$$

Действительно, для расстояний s_x, $r_x > \xi_0$ ядро $K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ переходит в ядро $K_p(\mathbf{s}-\mathbf{r})$ для массивного металла. При $T=T_c$ любая линейная функция вида (7.55) представляет собой решение уравнения

$$\Delta(\mathbf{s}) = \int K_p(\mathbf{s}-\mathbf{r})\Delta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

поскольку

$$\int K_p(\mathbf{s}-\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = 1,$$

а интеграл

$$\int K_p(\mathbf{s}-\mathbf{r})[\Delta(\mathbf{r})-\Delta(\mathbf{s})]\,d\mathbf{r}$$

обращается в нуль в силу симметрии.

Чтобы определить интересующую нас длину b, перепишем уравнение (7.54) в виде

$$\Delta(\mathbf{s}) - \int K_p(\mathbf{r}-\mathbf{s})\Delta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int [K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r}) - K_p(\mathbf{r}-\mathbf{s})]\Delta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = -H(\mathbf{s}). \tag{7.56}$$

Функция $H(\mathbf{s})$ обращается в нуль при $s_x > \xi_0$, поскольку $K_0 \to K_p$, и также при $s_x < -\xi_0$, поскольку $\Delta(\mathbf{r})=0$ для $r_x < 0$, а радиус действия ядра K_p составляет $\sim\xi_0$. Уравнение (7.56) обладает тем

[1]) На первый взгляд может показаться, что линейная зависимость (7.55) не имеет физического смысла, поскольку она приводит к очень большим значениям Δ на больших расстояниях от границы. На самом же деле при температурах, лежащих немного ниже T_c, правильное решение $\Delta(x)$ имеет отрицательную кривизну и внутри сверхпроводника $[x > \xi(T)]$ достигает значения Δ_0. Здесь мы интересуемся областью $x \sim \xi_0 \ll \xi(T)$, в которой влиянием кривизны можно пренебречь.

преимуществом, что его правая часть содержит возмущение, локализованное в точке. Считая пока $H(\mathbf{s})$ известной функцией, будем искать решение Δ с помощью преобразования Лапласа

$$\Delta(p)=\int \Delta(s_x)\, e^{-ps_x}\, d\mathbf{s},$$

$$H(p)=\int H(s_x)\, e^{-ps_x}\, d\mathbf{s}, \tag{7.57}$$

$$K_p(p)=\int K_p(\mathbf{r})\, e^{-pr_x}\, d\mathbf{r}=1+\frac{p^2}{2}L\ldots,$$

где

$$L=\int K_p(\mathbf{r})\, r_x^2\, d\mathbf{r}.$$

Явный вид L дается выражениями (7.43). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (7.56), получаем

$$\Delta(p)\,[1-K_p(p)]=-H(p).$$

Отсюда в пределе $p\to 0$ с помощью (7.57) находим

$$-\frac{L}{2}\,p^2\Delta(p)\to -H(0)=-\int H(s_x)\, d\mathbf{s}. \tag{7.58}$$

С другой стороны, при $p\to 0$ зависимость Δ от координат в основном линейна [см. (7.55)]:

$$\Delta(p)\to\frac{\Delta_0}{b}\int\limits_0^\infty s_x e^{-ps_x}\, d\mathbf{s}=\frac{\Delta_0\Sigma}{bp^2}, \tag{7.59}$$

где Σ — площадь поверхности. Сравнивая (7.58) и (7.59), получаем

$$\frac{1}{b}=\frac{2}{L\Sigma\Delta_0}\int H(s_x)\,d\mathbf{s}=\frac{2}{L\Sigma\Delta_0}\int [K_p(\mathbf{s}-\mathbf{r})-K_0(\mathbf{s},\mathbf{r})]\,\Delta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{s}. \tag{7.60}$$

Чтобы упростить это выражение, предположим, что взаимодействие V постоянно. Воспользовавшись ортогональностью функций $w_n(\mathbf{s})$, можно написать

$$\int K_0(\mathbf{r},\mathbf{s})\,d\mathbf{s}=N(\mathbf{r})\,V\ln\frac{1{,}14\hbar\omega_D}{k_BT_c}=\frac{N(\mathbf{r})}{N(0)}, \tag{7.61}$$

где

$$N(\mathbf{r})=\sum_n |w_n(\mathbf{r})|^2\,\delta(\xi_n)$$

— плотность состояний на поверхности Ферми в данной точке $\mathbf{r}$, $N(0)$ — ее обычное значение для массивного металла. Окончательно имеем

$$\frac{1}{b}=\frac{2}{L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\Delta(x)}{\Delta_0}\left[1-\frac{N(x)}{N(0)}\right]. \tag{7.62}$$

Входящее сюда отношение $\Delta(x)/\Delta_0$ обращается в нуль при переходе в диэлектрик и имеет порядок единицы в металле. Отношение $N(x)/N(0)$ изменяется от нуля до единицы на нескольких межатомных расстояниях; следовательно, подынтегральное выражение отлично от нуля лишь в слое шириной порядка межатомного расстояния a. Таким образом, эффективная длина b равна

$$b \sim \frac{L}{a}, \tag{7.63}$$

т. е., вообще говоря, очень велика (для чистого металла $L \sim \xi_0^2$, $\xi_0 \approx 10^{-4}$ *см*, что дает $b \approx 1$ *см*). Это позволяет нам при рассмотрении задач, в которых сверхпроводник находится в контакте с диэлектриком, положить $1/b = 0$ и пользоваться граничным условием (6.13). Более точный критерий применимости условия (6.13) выражается неравенством $b \gg \xi(T)$, которое эквивалентно условию [1])

$$\frac{a}{\xi_0} \ll \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}.$$

Контакт между сверхпроводником и нормальным металлом

Обсудим теперь кратко случай контакта между нормальным металлом и сверхпроводником. Если контакт между областями N и S является достаточно хорошим в электрическом отношении, то куперовские пары могут диффундировать из сверхпроводника в нормальный металл. Математически это означает, что функция $\Delta(\mathbf{s})$ простирается в область N ($x < 0$) на довольно большое расстояние: $\xi_N \sim \hbar v_{FN}/k_B T$ (если N представляет собой чистый металл).

Для рассматриваемого случая выражение (7.60) остается в силе. Однако теперь нам необходимо знать точную форму $\Delta(x)/\Delta_0$, т. е. точное решение интегрального уравнения (7.54). Разумную аппроксимацию дает выражение вида

$$\Delta \sim \Delta_0 \frac{N_N}{N_S} T_j e^{x/\xi_N} \quad \text{при} \quad x < 0, \tag{7.64}$$

где N_N/N_S — отношение плотностей состояний [см. (7.61)], а T_j — коэффициент прохождения через границу электрона с энергией, равной

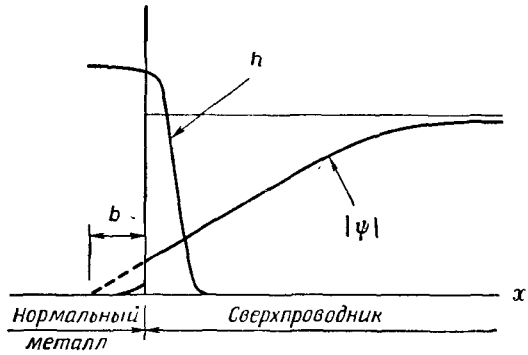
[1]) Уравнения Гинзбурга — Ландау приближенно применимы также для описания сверхтекучего He^4 в окрестности температуры фазового перехода T_λ. Однако в отличие от сверхпроводников для He^4 параметр ξ_0 равен a [$b \sim a \ll \xi(T)$], поэтому условие на границе выглядит совершенно иначе и довольно близко к условию $\psi_{x=0} = 0$.

фермиевской. Подставляя (7.64) в (7.62), находим

$$b \sim \frac{N_S}{N_N} \frac{1}{T_j} \frac{L}{\xi_N}. \tag{7.65}$$

Если $(N_N/N_S)\,T_j \sim 1$, то длина $b \sim \xi_N$ [т. е. мала по сравнению с $\xi(T)$] и граничное условие имеет совершенно другой вид, чем в случае контакта сверхпроводника с диэлектриком.

Задача. Определить изменение глубины проникновения поля в сверхпроводник, возникающее в результате покрытия его слоем нормального металла (фиг. 60) [119].



Фиг. 60. Распределение магнитного поля вблизи границы нормальный металл — сверхпроводник.

Решение. Будем вести вычисления с помощью уравнений Гинзбурга — Ландау. Поле на NS-границе можно считать равным приложенному, поскольку естественно принять (как имеет место в действительности), что N-металл не дает вклада в экранирование магнитного поля. Что касается параметра порядка, то наличие N-металла приводит к граничному условию типа (7.53) на поверхности ($x = 0$) сверхпроводника.

1. *В отсутствие поля* решение $\psi(x)$ запишем в виде

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{\psi_0} = \operatorname{th} \frac{x - x_0}{\sqrt{2}\,\xi(T)},$$

где x_0 — неизвестный параметр, который определяется, согласно (7.53), из условия

$$\left(\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{b}.$$

Предположим, что электрический контакт на NS-границе является хорошим (тогда плотность состояний в N-металле сравнима с аналогичной величиной в S-металле) и что толщина слоя N велика по сравнению с $\xi_0 \approx \hbar v_F / k_B T_c$; в этом случае b имеет порядок ξ_0. Поэтому можно считать $b \ll \xi(T)$, что соответствует очень малому значению $f(0)$ параметра порядка на поверхности сверхпроводника [$f(0) \sim b/\sqrt{2}\,\xi(T) \ll 1$].

2. Наложим теперь вдоль оси z *слабое магнитное поле* $h_z(x) = \partial A_y(x)/\partial x$. Тогда уравнение для вектора-потенциала принимает вид

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} = \frac{16\pi e^2}{mc^2} |\psi_0|^2 f^2 A_y = \frac{f^2}{\lambda_L^2(T)} A_y.$$

Для слабых полей функцию f можно заменить приведенным выше значением в отсутствие поля. Получающееся в результате уравнение для A_y удается решить точно с помощью гипергеометрических функций (см. аналогичную задачу в книге Ландау и Лифшица [72], § 23). Приведем здесь результат для предельного случая $b/\xi(T) \to 0$ [$x_0 \to 0$, $f(0) \to 0$]:

$$\frac{\lambda}{\lambda_L(T)} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-S/2+1/\varkappa\sqrt{2})\,\Gamma(1/2+S/2+1/\varkappa\sqrt{2})}{\Gamma(1/2-S/2+1/\varkappa\sqrt{2})\,\Gamma(1+S/2+1/\varkappa\sqrt{2})},$$

$$S = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{8}{\varkappa^2}}\right).$$

Для малых значений $\varkappa$

$$\frac{\lambda}{\lambda_L(T)} \to 1{,}76\varkappa^{-1/2}.$$

Последний результат легко получить на основании следующих простых соображений. Когда глубина проникновения мала, мы можем заменить (в области проникновения поля) точное выражение для f (при $x_0 = 0$) приближенным

$$f = \frac{x}{\sqrt{2}\,\xi(T)}.$$

Уравнение для A_y тогда принимает вид

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} = \frac{x^2}{2\lambda_L^2(T)\,\xi^2(T)} A_y.$$

Следовательно, глубина проникновения по порядку величины равна $[\lambda_L(T)\,\xi(T)]^{1/2}$.

В противоположном предельном случае, когда $\varkappa \to \infty$, имеем $[\lambda/\lambda_L(T)] \to 1$. Этот результат также не удивителен, поскольку при $\xi(T) \ll \lambda_L(T)$ наличие N-слоя приводит к искажению функции $\psi(x)$ лишь вблизи границы на расстояниях, малых по сравнению с $\lambda_L(T)$.

3. *В сильных полях* глубина проникновения быстро растет с увеличением поля, если $\varkappa \approx 1/\sqrt{2}$ и $b \ll \xi(T)$. Этот вывод следует из рассмотрения полной системы нелинейных уравнений Гинзбурга — Ландау; недавно он был подтвержден в опытах Бурже и др. [138] на системе Cu — Pb.

Контакт S—N—S'

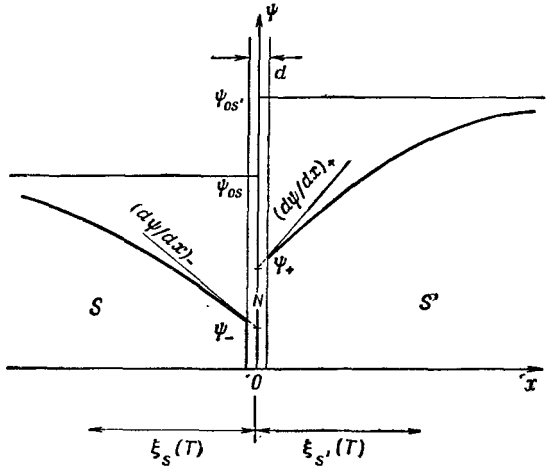
Рассмотрим теперь систему из трех слоев $S - N - S'$, показанную на фиг. 61; два сверхпроводника S и S' разделены либо слоем диэлектрика N (толщиной $d \approx 20 - 50$ Å), либо слоем нормального металла ($d \approx 10^3$ Å). При не слишком больших толщинах d куперовские пары могут переходить из S в S' и обратно за счет туннель-

ного эффекта. Мы проведем анализ этого эффекта, делая следующие предположения:

1) в металлах S и S' выполнены условия применимости уравнений Гинзбурга — Ландау;

2) толщина d мала по сравнению с $\lambda_L(T)$ и $\xi(T)$.

В этом случае роль пленки N сводится к наложению определенных граничных условий, связывающих значения Δ и $d\Delta/dx$ на обеих



Фиг. 61. Контакт S—N—S'.

N — либо диэлектрик ($d \sim 50$ Å), либо нормальный металл ($d \sim 10^3$Å).

сторонах N-области. Как и раньше, граничные условия можно записать в линейной форме. Выпишем их сначала для случая, когда векторпотенциал $\mathbf{A}$ равен нулю:

$$\begin{aligned} \Delta_+ &= L_{11}\Delta_- + L_{12}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)_-, \\ \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)_+ &= L_{21}\Delta_- + L_{22}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)_-. \end{aligned} \tag{7.66}$$

Направление оси x совпадает с нормалью к плоскости пленки. Величина Δ_+ представляет собой значение $\Delta(x, y, z)$, полученное в результате экстраполяции решения уравнения Гинзбурга — Ландау из области S' на плоскость $x = 0$ и т. д. (см. фиг. 61). Коэффициенты L_{ij} можно определить, находя точный вид решения линеаризованного уравнения самосогласованности (7.8) (при $T = T_c$ и $\mathbf{A} = 0$) в области N, а также в областях S и S' вблизи границ. Поскольку при $\mathbf{A} = 0$ ядро $K_0(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ этого уравнения вещественно, коэффициенты L_{ij} также

вещественны. Иногда бывает удобно пользоваться вместо Δ функцией ψ, для которой граничные условия (7.66) при $\mathbf{A}=0$ можно представить в виде

$$\psi_+ = M_{11}\psi_- + M_{12}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_-,$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_+ = M_{21}\psi_- + M_{22}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_-. \qquad (7.66')$$

Если металлы S и S' не одинаковы, то отношение ψ/Δ, согласно определению (6.8), имеет разные значения в областях S и S'. Отсюда следует, что коэффициенты M_{ij}, вообще говоря, отличны от коэффициентов L_{ij}, но по-прежнему вещественны. Они не являются совершенно независимыми, но связаны между собой соотношением, вытекающим из условия непрерывности тока на границе. Сверхпроводящий ток через единицу площади поверхности описывается выражением (при $\mathbf{A}=0$)

$$I_x = -\frac{ie\hbar}{m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \text{Компл. сопр.}\right)_+ =$$
$$= -\frac{ie\hbar}{m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \text{Компл. сопр.}\right)_-. \qquad (7.67)$$

Сравнивая (7.67) и (7.66'), получаем

$$M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1, \qquad (7.68)$$

что позволяет записать плотность тока I_x в виде

$$I_x = -\frac{ie\hbar}{m}\left\{\psi_-^*\left(\frac{1}{M_{12}}\psi_+ - \frac{M_{11}}{M_{12}}\psi_-\right) - \text{Компл. сопр.}\right\} =$$
$$= -\frac{ie\hbar}{mM_{12}}(\psi_-^*\psi_+ - \text{Компл. сопр.}). \qquad (7.69)$$

Из (7.69) видно, что *через контакт может протекать сверхпроводящий ток* — результат, полученный Джозефсоном в 1962 г. Для больших толщин d коэффициент M_{12} становится большим, а ток соответственно малым. Явление протекания сверхпроводящего тока через контакт впервые наблюдалось в опыте Андерсона и Роуэлла в 1963 г.

Полученные результаты легко обобщить на случай $\mathbf{A}\neq 0$. Как всегда, будем предполагать выполненным условие непрерывности вектора-потенциала $\mathbf{A}$ в области применимости уравнений Гинзбурга — Ландау[1]). Полагая $A_x = A_x(0, y, z)$, заменим систему (7.66') сле-

[1]) Если калибровка выбрана различной по обе стороны от границы, то вектор-потенциал $\mathbf{A}$, очевидно, может иметь разрыв.

дующей:

$$\psi_+ = M_{11}\psi_- + M_{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2ie}{\hbar c} A_x\right)\psi_-,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2ie}{\hbar c} A_x\right)\psi_+ = M_{21}\psi_- + M_{22}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2ie}{\hbar c} A_x\right)\psi_-. \tag{7.70}$$

Выражение для тока (7.69) остается неизменным [1]).

С точки зрения практических применений выражение (7.69) принимает наиболее простой вид в том случае, когда область N мало прозрачна для куперовских пар, т. е. ток I_x мал по сравнению с критическими токами для сверхпроводников S и S' (в виде массивных образцов).

В этом случае мы можем положить амплитуды $|\psi_+|$ и $|\psi_-|$ (в силу их слабой зависимости от тока) равными значениям $\psi_{S'}$ и ψ_S в отсутствие последнего. Тогда

$$\psi_+ \to \psi_{S'} e^{i\varphi_{S'}},$$
$$\psi_- \to \psi_S e^{i\varphi_S}$$

(величины ψ_S и $\psi_{S'}$ вещественны). Напротив, фазы φ_S и $\varphi_{S'}$, вообще говоря, весьма чувствительны к присутствию токов или магнитных полей, поэтому заранее ничего нельзя сказать относительно их вида. Производя соответствующую замену в (7.69), окончательно приходим к следующему выражению для тока:

$$I_x = \frac{2e\hbar}{mM_{12}} \psi_S \psi_{S'} \sin(\varphi_S - \varphi_{S'}). \tag{7.71}$$

Максимальная величина тока, очевидно, равна

$$I_m = \frac{2e\hbar}{mM_{12}} \psi_S \psi_{S'}. \tag{7.72}$$

Для определения величин ψ_S и $\psi_{S'}$ нам осталось лишь решить уравнение Гинзбурга — Ландау в областях S и S' для простого случая $\mathbf{A} = 0$ в предположении вещественности функции ψ. Одномерные решения такого типа нам уже известны:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_{0S'} \operatorname{th} \dfrac{x + x_{S'}}{\sqrt{2}\,\xi_{S'}(T)}, & x > 0, \\ \psi_{0S} \operatorname{th} \dfrac{-x + x_{S'}}{\sqrt{2}\,\xi_S(T)}, & x < 0. \end{cases} \tag{7.73}$$

[1]) Особенно прост случай симметричного контакта ($M_{11} = M_{22}$). Принимая во внимание условие (7.68), мы видим, что в этом случае коэффициенты M_{ij} можно задать всего с помощью двух независимых параметров.

где ψ_{0S} и $\xi_S(T)$ — соответственно параметр порядка и длина когерентности при температуре T для массивного металла S. Длины x_S и $x_{S'}$ связаны с величинами ψ_S и $\psi_{S'}$ соотношениями

$$\psi_S = \psi_{0S} \operatorname{th} \frac{x_S}{\sqrt{2}\xi_S(T)}, \qquad \psi_{S'} = \psi_{0S'} \operatorname{th} \frac{x_{S'}}{\sqrt{2}\xi_{S'}(T)}. \tag{7.74}$$

Явный вид их можно найти, потребовав, чтобы решения (7.73) удовлетворяли граничным условиям (7.66′). Это дает

$$\psi_{S'} = M_{11}\psi_S - M_{12}\frac{\psi_{0S}}{\sqrt{2}\xi_S(T)}\left(1 - \frac{\psi_S^2}{\psi_{0S}^2}\right),$$
$$\frac{\psi_{0S'}}{\sqrt{2}\xi_{S'}(T)}\left(1 - \frac{\psi_{S'}^2}{\psi_{0S'}^2}\right) = M_{21}\psi_S - M_{22}\frac{\psi_{0S}}{\sqrt{2}\xi_S(T)}\left(1 - \frac{\psi_S^2}{\psi_{0S}^2}\right). \tag{7.75}$$

Чтобы определить ψ_S и $\psi_{S'}$, систему уравнений (7.75) следует решать численно.

Здесь мы укажем два предельных случая, когда эта система уравнений упрощается.

1. Если слой N представляет собой диэлектрик, то его наличие почти не сказывается на поведении функции $\psi(x)$ ($\psi_S \approx \psi_{0S}$); коэффициенты M_{12}^{-1} и M_{21}^{-1} малы, а $M_{11} \approx 1$ (см. микроскопический расчет, следующий ниже). Выражение для максимального тока приобретает вид

$$I_m = \frac{2e\hbar}{mM_{12}}\psi_{0S}\psi_{0S'}.$$

Так как коэффициент M_{12} при $T \to T_c$ конечен, а величины ψ_{0S} и $\psi_{0S'}$, согласно (6.15), меняются как $(T_c - T)^{1/2}$, максимальный ток линеен относительно $T_c - T$.

2. Если слой N представляет собой нормальный металл, толщина которого достаточно велика, чтобы ток I_m оставался малым, но мала по сравнению с $\lambda_L(T)$ и $\xi(T)$, то на основании предыдущего анализа для NS-границы мы можем теперь заключить, что

$$\frac{\psi_S}{\psi_{0S}} \sim \frac{\psi_{S'}}{\psi_{0S'}} \sim \frac{b}{\xi(T)} \ll 1.$$

Следовательно, система (7.75) допускает линеаризацию. Максимальный ток равен

$$I_m \sim \frac{e\hbar}{mM_{12}}\left[\frac{b}{\xi(T)}\right]^2 \psi_{0S}\psi_{0S'},$$

т. е. меняется как $(T_c - T)^2$. Такая зависимость наблюдалась недавно в серии весьма изящных экспериментов, выполненных Кларке.

Микроскопический расчет M_{ij} для диэлектрического слоя

Рассмотрим симметричный контакт с диэлектриком толщиной $d \ll \xi_0$ и будем исходить из линеаризованного уравнения самосогласованности (7.8) при $\mathbf{A}=0$ и $T=T_c$.

Согласно (7.35), ядро $K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ существенным образом определяется видом функции $\langle \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}(0)]\, \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)]\rangle_{E_F}$, которая с физической точки зрения представляет собой вероятность того, что электрон с энергией, равной фермиевской, в момент t находится в точке $\mathbf{r}'$ (в нормальном металле), если в момент времени $t=0$ он находился в точке $\mathbf{r}$. Отсюда мы можем непосредственно выразить ядро $K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ через ядро $K_{\text{чист}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ для неограниченного чистого металла S. Проделав это, запишем уравнение (7.8) в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = \int\limits_{\text{I}} K_{\text{чист}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Delta(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' + \int\limits_{\text{II}} K_{\text{чист}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,[T_j\Delta(\mathbf{r}') + R_j\Delta(\bar{\mathbf{r}}')\,d\mathbf{r}'], \quad (7.76)$$

где первый интеграл (I) соответствует прямому переходу электрона из $\mathbf{r}$ в $\mathbf{r}'$, а область интегрирования определяется условием, что обе точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ находятся по одну сторону от границы. Второй интеграл (II) учитывает эффекты отражения электронов от контакта и прохождения через него; коэффициент $T_j = 1 - R_j$ представляет собой коэффициент прохождения через барьер для электронов с энергией E_F в нормальном металле. Точка $\bar{\mathbf{r}}' = (-x', y', z')$ является зеркальным изображением точки $\mathbf{r}'$ относительно границы. Для простоты будем считать, что отражение носит зеркальный характер, а коэффициент отражения не зависит от угла падения электрона на границу.

Уравнение (7.76) имеет четное решение $\Delta(x) = \Delta(-x)$, постоянное в пространстве, в силу условия

$$\int K_{\text{чист}}(\mathbf{r}-\mathbf{s})\,d\mathbf{r} = 1 \quad \text{при} \quad T = T_c.$$

Чтобы определить M_{12}, необходимо знать второе независимое решение, например нечетное решение $\Delta(x) = -\Delta(-x)$.

Положим $\Delta^+(x) = \Delta(x)\,S(x)$, где

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (7.76) можно записать в форме

$$\Delta^+(x) = S(x) \int \Delta^+(x')\,[K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (1 - 2T_j)\,K_0(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}')]\,d\mathbf{r}',$$

или

$$\Delta^+(x) - \int K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Delta^+(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \int d\mathbf{r}'\Delta^+(\mathbf{r}')[-S(-x)K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ + S(x)(1-2T_j)K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = -H(x). \quad (7.77)$$

Функция $H(x)$ соответствует источнику, локализованному в области $|x| < \xi_0$. Полученное уравнение аналогично уравнению (7.56) и может быть решено тем же способом

$$\frac{L}{2}\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)_{x \gg \xi_0} = \int_{\infty}^{0} H(x)\,dx = \\ = 2T_j \int_{\infty}^{0} dx \int_{\infty}^{0} dx' \int dy'\,dz'\Delta^+(x')K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (7.78)$$

Поскольку на поверхности сверхпроводник граничит со слоем диэлектрика, функция $\Delta^+(x')$ мало меняется в области интегрирования ($x' \sim \xi_0$).

Сделав замену $\Delta^+(x) \to \Delta_+$, остающийся интеграл можно легко вычислить, используя определение $K_{\text{чист}}$:

$$\int_{-\infty}^{0} dx \int_{0}^{\infty} dx' \int dy'\,dz' K_{\text{чист}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \xi_0. \quad (7.79)$$

Окончательно получаем

$$\frac{L}{2}\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)_+ = T_j\xi_0\Delta_+.$$

Сравнивая этот результат и граничное условие (7.66), находим

$$L_{12} = M_{12} = \frac{L}{T_j\xi_0}. \quad (7.80)$$

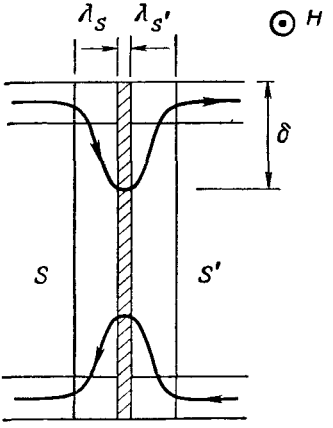
Поскольку $L \sim \xi_0^2$, мы видим, что $M_{12} \sim \xi_0/T_j$. На практике коэффициент прохождения T_j через слой изолятора толщиной d, превышающей несколько ангстрем, чрезвычайно мал. Это означает, что весьма мал и максимальный сверхпроводящий ток, который может протекать через контакт,

$$I_m \sim \frac{e\hbar}{m\xi_0}|\psi_0|^2 T_j. \quad (7.81)$$

Распределение полей и токов в области контакта

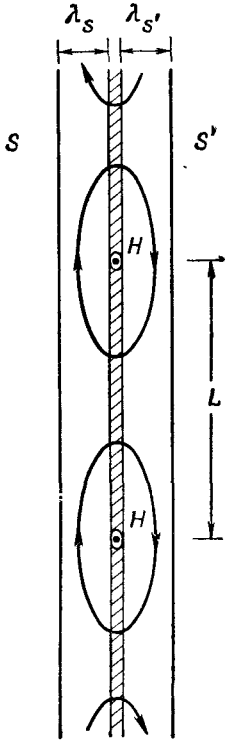
Типичное распределение токов показано на фиг. 62. Поле H лежит в плоскости контакта; вдоль внешних границ областей S и S' текут поверхностные токи, экранирующие приложенное поле. Рассмотрим, каким образом эти токи проходят через контакт. Поскольку максимальная плотность тока I_m мала, линии тока в области контакта должны проходить глубоко внутри сверхпроводников S и S'. В случае контакта, содержащего тонкий слой диэлектрика, типичное значение глубины проникновения линий тока составляет $\delta \sim 1$ *мм*. При несколько больших значениях поля ситуация еще больше усложняется и существенную роль начинает играть образование вихревых нитей в плоскости контакта (фиг. 63).

Феррел и Пранге [80] предложили простое уравнение, описывающее распределение поля и тока в области контакта в такого рода ситуациях. Чтобы получить это уравнение, рассмотрим контакт, целиком занимающий плоскость $x = 0$; магнитное поле направим вдоль оси z и



Фиг. 62. Характерный вид линий тока вблизи контакта $S - N - S'$ в слабом приложенном поле.

Так как ток через переход мал, поле проникает на большую глубину δ.



Фиг. 63. Распределение токов в области контакта в умеренных магнитных полях.

Характерной особенностью является наличие линейной цепочки вихревых нитей с осями, расположенными в плоскости контакта.

будем описывать с помощью вектора-потенциала, направленного вдоль оси y:

$$h(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} A_y(x, y).$$

Решение уравнений Гинзбурга — Ландау будем искать в виде

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \psi(x)\, e^{i\varphi_{S'}(y)} & \text{при} \quad x > 0, \\ \psi(x)\, e^{i\varphi_S(y)} & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{7.82}$$

Дальше мы увидим, что изменение фазы φ_S (или $\varphi_{S'}$) происходит на расстояниях δ, значительно превышающих $\xi(T)$. Следовательно, функция $\psi(x)$ фактически совпадает с решением (7.73).

Рассмотрим сначала область $x > 0$ вдали от контакта ($x \gg \lambda_{S'}$), в которой эффект Мейсснера является полным и токи равны нулю. Тогда из (6.12) следует

$$\frac{2e}{\hbar c} A_y = \frac{\partial \varphi_{S'}(y)}{\partial y} \quad \text{при} \quad x \gg \lambda_{S'} \tag{7.83а}$$

и аналогично

$$\frac{2e}{\hbar c} A_y = \frac{\partial \varphi_S(y)}{\partial y} \quad \text{при} \quad x \ll -\lambda_S. \tag{7.83б}$$

Таким образом, функция $A_y(x, y)$ имеет вполне определенные значения по обе стороны вдали от контакта. Обозначим их через $A_S(y)$ и $A_{S'}(y)$. На самом переходе ($x = 0$) мы для удобства положим $A_y(0, y) = 0$. Магнитное поле $h(0, y) = h_0(y)$ на самом контакте ($x = 0$) легко найти следующим образом.

Обозначим через λ_S и $\lambda_{S'}$ глубину проникновения поля соответственно в областях S и S' вблизи контакта[1]). По определению,

$$\begin{aligned} A_{S'} &= \int_0^\infty h\, dx = \lambda_{S'} h_0, \\ A_S &= \int_{-\infty}^0 h\, dx = \lambda_S h_0. \end{aligned} \tag{7.84}$$

Отсюда и из (7.83) следует

$$h_0 = \frac{\hbar c}{2e} \frac{1}{\lambda_{S'}} \frac{\partial \varphi_{S'}}{\partial y} = \frac{\hbar c}{2e} \frac{1}{\lambda_S} \frac{\partial \varphi_S}{\partial y}. \tag{7.85}$$

---

[1]) Если область N является нормальным металлом, то вблизи контакта значение $\psi(x)$ мало, что необходимо учитывать при расчете глубины проникновения, подобно тому как мы это делали в случае NS-границы.

Далее, используя уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

запишем связь между значениями поля и тока в плоскости контакта в виде

$$\frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} I_x = \frac{4\pi}{c} I_m \sin(\varphi_S - \varphi_{S'}). \tag{7.86}$$

При переходе к последнему равенству мы воспользовались выражением (7.71). Подставляя (7.85) в (7.86), приходим к уравнению Феррела — Пранге

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2} \sin \varphi, \tag{7.87}$$

где $\varphi = \varphi_S - \varphi_{S'}$,

$$\delta^2 = \frac{\hbar c^2}{8\pi e I_m (\lambda_S + \lambda_{S'})}. \tag{7.88}$$

Оценим характерную длину δ для контакта, содержащего слой диэлектрика. Используя оценку (7.81) для I_m, находим

$$\delta^2 \sim \frac{mc^2}{16\pi e^2 |\psi_0|^2} \frac{\xi_0}{\lambda_L(T)} \frac{1}{T_j} \sim \frac{\lambda_L(T)\xi_0}{T_j}. \tag{7.89}$$

Для диэлектрика толщиной $d \sim 20$ Å коэффициент прохождения T_j обычно имеет порядок 10^{-8}. Если положить, кроме того, $\lambda_L(T) \sim \xi_0 \sim 10^3$ Å, то получим $\delta \sim 1$ *мм*.

Уравнение (7.87) формально совпадает с уравнением движения математического маятника, поэтому его решения хорошо известны. Особый интерес представляют два предельных случая.

1. Очень слабые поля. В этом случае уравнение (7.87) линеаризуется и имеет решения вида

$$\varphi = \varphi_0 e^{-y/\delta}, \quad h_0 = He^{-y/\delta}, \tag{7.90}$$

где $y = 0$ есть линия пересечения плоскости контакта с поверхностью образца; H — поле вне образца. Таким образом, глубина проникновения слабого поля в окрестности контакта равна δ. Эта картина имеет место, пока $\phi \ll \phi_0$, или, что то же самое, при $H \ll \phi_0/\delta(\lambda_S + \lambda_{S'})$, т. е. пока проникающий в область контакта поток остается меньше величины кванта потока ϕ_0.

2. Область полного проникновения поля. Если $H \gg \phi_0/\delta(\lambda_S + \lambda_{S'})$, то поле становится почти однородным на всей плоскости контакта [$h_0(y) \to H$]. Величину φ легко найти из уравнения (7.85)

$$\varphi \approx \frac{2\pi y}{L} + \text{const}, \quad L = \frac{\phi_0}{(\lambda_S + \lambda_{S'})H}. \tag{7.91}$$

Следовательно, распределение тока имеет периодический характер с периодом L

$$I_x = I_m \sin\varphi \approx I_m \sin\left[\frac{2\pi (y - y_0)}{L}\right]. \qquad (7.92)$$

Подставляя (7.91) в правую часть (7.87), легко проверить, что производные $\partial^2\varphi/\partial y^2$ и $\partial h_0/\partial y$ действительно пренебрежимо малы при условии $L \ll \delta$.

Распределение токов показано на фиг. 63. Оно напоминает линейную структуру из вихревых нитей, расположенных в плоскости контакта. В частности, в обоих случаях периоду структуры отвечает один квант потока. Поскольку глубина проникновения δ очень велика ($\delta \gg \xi_0$), рассматриваемая ситуация аналогична наблюдающейся в сверхпроводниках второго рода ($\lambda_L \gg \xi_0$). С помощью прямого расчета термодинамического потенциала можно также показать, что в пределе $L \ll \delta$ поле h_0 весьма близко к величине приложенного поля.

Наконец, вычислим полный ток, текущий из S в S', для контакта в виде прямоугольной полосы шириной D ($0 < y < D$). Ток, приходящийся на единицу длины вдоль оси z, равен

$$I_{\text{полн}} = \int_0^D I_m \sin\varphi \, dy.$$

Учитывая, что $L \ll \delta$, находим

$$I_{\text{полн}} \approx \frac{I_m L}{2\pi} \int d\varphi \sin\varphi = \frac{I_m L}{2\pi} \left\{ \cos\varphi(0) - \cos\left[\varphi(0) + \frac{2\pi D}{L}\right]\right\}.$$

Максимальное значение тока $I_{\text{полн}}$ достигается при $\varphi(0) = \pi/2 - \pi D/L$ и равно

$$I_{\text{полн}}^{\text{макс}} = \frac{I_m L}{2\pi} \left| \sin\frac{\pi D}{L} \right| \quad \text{при} \quad L \ll \delta. \qquad (7.93)$$

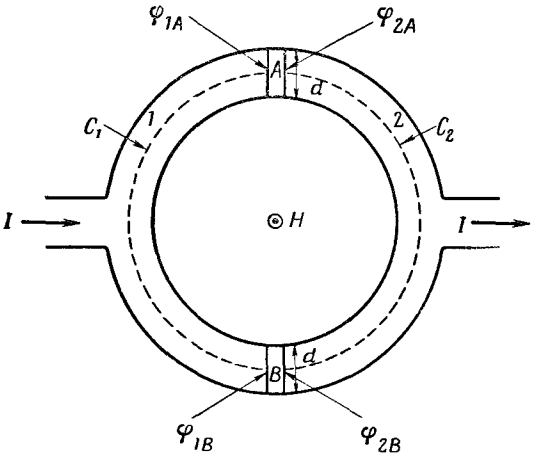
Входящий сюда множитель D/L равен полному числу квантов потока в контакте. Очевидно, полный ток обращается в нуль, когда отношение D/L равно целому числу, и максимален при полуцелых значениях D/L. Весьма подробное сравнение формулы (7.93) с опытом можно найти в работах Фиске [120] и Роуэлла [121].

Задача. Получить зависимость максимального сверхпроводящего тока I от величины приложенного магнитного поля H для системы, состоящей из двух параллельно включенных контактов $S - N - S'$ („квантовый интерферометр"). Схема устройства и обозначения приведены на фиг. 64. Задан магнитный поток ϕ в кольце, которое образуется при параллельном включении контактов в цепь. Для простоты будем считать, что а) толщина контактов A и B и область проникновения поля около каждого из них малы, т. е. мал заключенный в них суммарный поток $2d\lambda H \ll \phi_0$; б) толщина сверхпроводящих соединений 1 и 2 велика по сравнению с глубиной проникновения.

Р е ш е н и е. Полный ток, текущий из 1 в 2, равен

$$I = I_m d\,[\sin(\varphi_{2A} - \varphi_{1A}) + \sin(\varphi_{2B} - \varphi_{1B})].$$

Входящие сюда четыре значения фазы φ_{1A}, φ_{2A} и т. д. связаны между собой



Ф и г. 64. Принципиальная схема «квантового интерферометра».

Сечения A и B представляют собой контакты джозефсоновского типа. Измеряется зависимость максимального тока I от поля H внутри кольца.

одним соотношением, содержащим поток ϕ. Чтобы получить это соотношение, будем исходить из выражения для плотности тока в произвольной точке сверхпроводника 1

$$\mathbf{j} \sim \hbar\nabla\varphi - \frac{2e}{c}\mathbf{A},$$

где φ — значение фазы потенциала спаривания в выбранной точке. Рассмотрим контур C_1, целиком лежащий внутри сверхпроводника и достаточно удаленный от его поверхности. Тогда $\mathbf{j} = 0$ вдоль C_1, т. е.

$$\hbar\nabla\varphi = \frac{2e}{c}\mathbf{A}.$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$\varphi_{1B} - \varphi_{1A} = \frac{2e}{\hbar c}\int\limits_{C_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}.$$

Аналогично

$$\varphi_{2A} - \varphi_{2B} = \frac{2e}{\hbar c}\int\limits_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}.$$

Складывая эти равенства, приходим к искомому соотношению

$$\varphi_{1B} - \varphi_{2B} + \varphi_{2A} - \varphi_{1A} = \frac{2e}{\hbar c}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi\frac{\phi}{\phi_0},$$

где ϕ — заключенный в кольце полный поток.

Кроме полученного соотношения, на фазы φ_{1A}, φ_{2A} и т. д. не налагается никаких других ограничений. Ток I будет максимальным, если мы выбираем

$$\varphi_{2A} - \varphi_{1A} + (\varphi_{2B} - \varphi_{1B}) = \pi,$$

тогда

$$I_{\text{макс}} = 2I_m d \left| \cos\left(\pi \frac{\phi}{\phi_0}\right)\right|,$$

т. е. максимальное значение сверхпроводящего тока периодически зависит от ϕ (или H). Чтобы наблюдать на опыте такую периодичность по полю, площадь кольца S необходимо сделать по возможности малой; роль джозефсоновских контактов A и B при этом могут выполнять просто два механических контакта между концами сверхпроводящих проволочек. Экспериментально рассмотренный эффект впервые изучили Жаклевич, Мерсеро и др. [122].

ЛИТЕРАТУРА

Микроскопический вывод уравнений Гинзбурга — Ландау

Горьков Л. П., ЖЭТФ, **36**, 1918; **37**, 1407 (1959).

Сравнение экспериментальных данных для $\varkappa$ в „грязных" сплавах с формулой Горькова

Goodman B. B., IBM Journ., **6**, 63 (1962).
Kinsel T., Lynton E. A., Serin B., Phys. Lett., **3**, 30 (1962).

Эффект Джозефсона и условия на границе сверхпроводника с нормальным металлом

Josephson B. D., Rev. Mod. Phys., **36**, 216 (1964).
De Gennes P. G., Rev. Mod. Phys., **36**, 225 (1964).

Глава VIII

ЭФФЕКТЫ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ И РОЛЬ МАГНИТНЫХ ПРИМЕСЕЙ

Обсудим теперь два на первый взгляд совершенно разных физических явления.

1. Поведение "грязных" сверхпроводников и образцов малых размеров в сильных магнитных полях.

2. Влияние парамагнитных примесей на свойства сверхпроводников.

Однако оказывается, что явления 1 и 2 имеют много важных общих черт.

а) В обоих случаях возмущение действует с противоположным знаком на электроны куперовской пары. В случае 1 возмущением является член

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}),$$

меняющий знак при замене $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$. В случае 2 взаимодействие магнитной примеси i, имеющей спин $\mathbf{S}_i$, с электроном проводимости (с координатой $\mathbf{r}_e$ и спином $\mathbf{S}_e$), обычно берется в виде

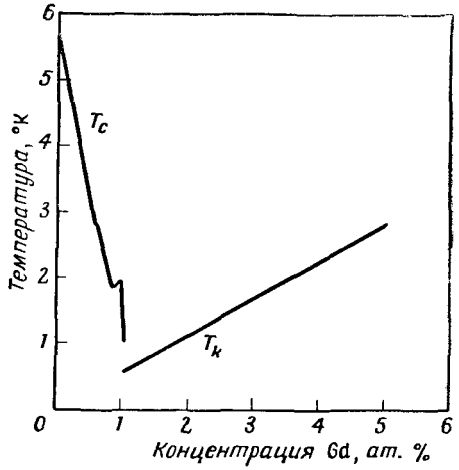
$$\Gamma(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_i)\,\mathbf{S}_e\cdot\mathbf{S}_i$$

(Γ называют константой обменного взаимодействия, хотя фактически его происхождение имеет более сложный характер). Знак Γ может быть любым, а типичное значение составляет $\sim 0{,}1$ *эв* $=10^3\,^\circ$K[1]). Поскольку электроны, образующие куперовскую пару, обладают противоположными спинами, это взаимодействие имеет противоположный знак для электронов одной пары.

б) На опыте такая "антисимметрия" возмущения приводит в обоих случаях к сильному понижению критической температуры сверхпроводника, как изображено на фиг. 65 и 66. Подчеркнем, что решающим фактором является "антисимметрия"; немагнитные примеси (дающие "симметричное" возмущение) оказывают очень слабое влияние на критическую температуру (теорема Андерсона).

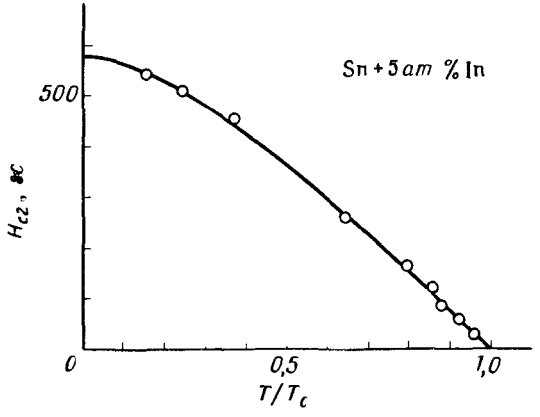
---

[1]) Отметим, что энергия Γ не имеет никакого отношения к магнитному дипольному взаимодействию между парамагнитной примесью и электроном проводимости. Действительно, константа связи дипольного взаимодействия равна $\sim\mu_B^2/a^3\sim 1^\circ$K ($\mu_B$ — магнетон Бора, a — атомный радиус), т. е. значительно меньше, чем Γ.



Фиг. 65. Температура перехода сплава LaGd в сверхпроводящее (T_c) и ферромагнитное (T_K) состояния (Маттиас [123]).

Следует отметить сильное понижение сверхпроводящей температуры перехода при добавлении к La небольшого количества магнитных атомов Gd.



Фиг. 66. Зависимость верхнего поля H_{c2} от температуры для «грязного» сверхпроводника второго рода (Sn + 5 ат.% In) (Гийон и др. [124]).

Сплошной линией показана теоретическая кривая.

в) В силу хаотичности рассеяния электронов на разного рода примесях и границах образца в обоих случаях куперовская пара в различные моменты времени должна испытывать со стороны "антисимметричного" возмущения воздействие разного знака. Это приводит, как мы увидим, к ряду удивительных свойств, и в частности к явлению бесщелевой сверхпроводимости [125].

§ 1. ТЕМПЕРАТУРА ПЕРЕХОДА И СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ПРИ ОБРАЩЕНИИ ВРЕМЕНИ

Попытаемся теперь более точно математически сформулировать приведенные выше качественные соображения относительно антисимметричных свойств возмущения. Проделаем это на примере вычислений температуры перехода сверхпроводника в заданном магнитном поле (случай 1) или при заданной концентрации магнитных примесей (случай 2). Опыт показывает, что в обоих случаях мы имеем фазовый переход второго рода. Это означает, что в окрестности точки перехода параметр $\Delta(\mathbf{r})$ можно считать малым и пользоваться линеаризованным уравнением самосогласованности вида (7.8).

Обратимся сначала к случаю 1, когда спин не играет роли и уравнение (7.8) применимо непосредственно. Перепишем ядро $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ уравнения (7.8) в форме, эквивалентной (7.11):

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = k_B T \sum_{\omega} \mathcal{V} N(0)\, V \int \frac{f[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; (\xi - \xi')/\hbar]}{(\xi - i\hbar\omega)(\xi' + i\hbar\omega)}\, d\xi\, d\xi', \quad (8.1)$$

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \Omega) = \sum_m \overline{\varphi_n^*(\mathbf{r}_1)\varphi_m^*(\mathbf{r}_1)\varphi_m(\mathbf{r}_2)\varphi_n(\mathbf{r}_2)}\, \delta(\xi_m - \xi_n - \hbar\Omega); \quad (8.2)$$

здесь $\mathcal{V}$ — объем образца; $N(0)$ — плотность состояний на единицу объема в нормальном металле, так что $\mathcal{V}N(0)$ — полная плотность состояний для образца в нормальном состоянии. При написании выражения (8.1) мы произвели замену $\sum_n \to \int \mathcal{V}N(0)\, d\xi_n$. Суммирование по ω, как обычно, происходит по всем значениям $\omega = (k_B T/\hbar)\pi \times (2\nu + 1)$. Среднее в выражении (8.2) берется по всем состояниям n при заданной энергии ξ_n (фактически при энергии, равной фермиевской, $\xi_n = 0$). Постараемся выразить произведение двух функций φ и φ^* через матричные элементы, образованные с помощью одноэлектронных состояний n и m. Однако сразу это сделать не удается вследствие очевидной трудности, связанной с операцией комплексного сопряжения. Обойдем эту трудность, введя специально для этой цели оператор K, который, действуя на произвольную функцию, дает, по определению, комплексно сопряженную величину

$$K\varphi_m = \varphi_m^* \text{ для случая 1.} \quad (8.3)$$

Оператор K мы будем называть *оператором обращения времени*. Используя определение K, можно написать

$$\varphi_n^*(\mathbf{r}_1)\varphi_m^*(\mathbf{r}_1) = \langle n \,|\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) K \,|\, m \rangle,$$

$$\varphi_n(\mathbf{r}_2)\varphi_m(\mathbf{r}_2) = \langle m \,|\, K^+ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \,|\, n \rangle, \tag{8.4}$$

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \Omega) =$$

$$= \sum_m \overline{\langle n \,|\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) K \,|\, m \rangle \langle m \,|\, K^+ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \,|\, n \rangle} \, \delta(\xi_n - \xi_m - \hbar\Omega).$$

На этой стадии, как обычно, удобно перейти с помощью обратного фурье-преобразования к функции

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) = \int d\Omega e^{-i\Omega t} f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \Omega) =$$

$$= \overline{\langle \delta[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_1] K(t) K^+(0) \delta[\mathbf{r}(0) - \mathbf{r}_2] \rangle}. \tag{8.5}$$

Здесь $K(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ являются гейзенберговскими операторами, описывающими изменение во времени операторов K и $\mathbf{r}$ для электрона, гамильтониан которого имеет вид (в случае 1)

$$\mathscr{H}_e = \frac{1}{2m}\left(\mathrm{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U(\mathbf{r}) - E_F, \tag{8.6а}$$

например

$$K(t) = e^{i\mathscr{H}_e t/\hbar} K e^{i\mathscr{H}_e t/\hbar}. \tag{8.6б}$$

Непривычный знак (плюс) во второй экспоненте связан с тем, что $Ki = -iK$. Уравнение движения оператора $K(t)$ имеет вид

$$\frac{dK(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathscr{H}_e, K(t)] =$$

$$= -\frac{ie}{\hbar mc}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{p}) K(t) \quad \text{для случая 1.} \tag{8.7}$$

Отсюда следует, что изменение $K(t)$ со временем происходит лишь из-за наличия в гамильтониане $\mathscr{H}_e$ „антисимметричных" членов, связанных с магнитным полем, т. е. членов, изменяющих знак при обращении времени.

Подведем итог полученным результатам. Для определения температуры перехода нам необходимо знать ядро $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, которое в свою очередь мы выразили через функцию корреляции $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$ [см. (8.4)]. Удобство последней состоит в том, что она, как мы уже видели ранее, тесно связана с транспортными свойствами системы в нормальном состоянии. Дальнейшие усложнения, связанные с „антисимметричным" характером возмущений, можно просто описать с помощью оператора обращения времени $K(t)$.

Предыдущие результаты можно непосредственно обобщить на случай, когда в металле имеются магнитные примеси, т. е. при

вычислениях необходимо учитывать спиновые индексы. Здесь мы вкратце остановимся на таком обобщении. Полный гамильтониан системы имеет вид

$$\mathscr{H} = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{r} \left\{ \Psi^{+}(\mathbf{r}, \sigma) \left[\frac{\left(\mathrm{p} - \frac{e}{c}\mathrm{A}\right)^2}{2m} - E_F \right] \Psi(\mathbf{r}, \sigma) + \right.$$
$$+ \sum_{\sigma, \nu} \Psi^{+}(\mathbf{r}, \sigma) U_{\sigma\nu}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, \nu) -$$
$$\left. - V \sum_{\sigma, \nu} \Psi^{+}(\mathbf{r}, \sigma) \Psi^{+}(\mathbf{r}, \nu) \Psi(\mathbf{r}, \nu) \Psi(\mathbf{r}, \sigma) \right\}, \qquad (8.8)$$

где $\Psi^{+}(\mathbf{r}, \sigma)$ — оператор рождения электрона со спином σ в точке $\mathbf{r}$ и т. д. Действующий на электроны потенциал $U_{\sigma\nu}$ в рассматриваемом случае магнитного сплава зависит от спиновых переменных. Для простоты записи мы считаем здесь, что U представляет собой локальный оператор, связывающий значения Ψ^{+} и Ψ в одной точке. Наиболее важным моментом является сделанное нами предположение, что потенциал U является *статическим*; тем самым мы с самого начала пренебрегаем движением спинов примесей. Позже мы увидим, что такое предположение выполняется лишь для очень разбавленных сплавов. В сплавах с большей концентрацией примесей существенную роль начинает играть взаимодействие спинов примесей друг с другом, что приводит к прецессии спина каждой примеси в обменном поле ближайших соседей.

Потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ определяется прежним выражением

$$\Delta(\mathbf{r}) = V \langle \Psi(\mathbf{r}\uparrow) \Psi(\mathbf{r}\downarrow) \rangle = -V \langle \Psi(\mathbf{r}\downarrow) \Psi(\mathbf{r}\uparrow) \rangle,$$

которое можно записать в следующей форме:

$$\Delta = \frac{V}{2} \sum_{\sigma, \mu} \rho_{\sigma\mu} \langle \Psi(\mathbf{r}, \sigma) \Psi(\mathbf{r}, \mu) \rangle, \qquad (8.9)$$

где

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подобно тому как делалось в гл. V, напишем теперь уравнения движения для операторов Ψ и Ψ^{+}, а затем, считая параметр Δ отличным от нуля, линеаризуем их. Для Ψ линеаризованное уравнение движения имеет вид

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, \sigma) = [\mathscr{H}, \Psi(\mathbf{r}, \sigma)] =$$
$$= \left(\frac{p^2}{2m} - E_F\right) \Psi(\mathbf{r}, \sigma) + \sum_{\mu} U_{\sigma\mu} \Psi(\mathbf{r}, \mu) + \sum_{\mu} \rho_{\sigma\mu} \Delta(\mathbf{r}) \Psi^{+}(\mathbf{r}, \mu). \qquad (8.10)$$

(Как обычно, мы вычли химический потенциал E_F.) Чтобы перейти к описанию с помощью элементарных возбуждений, совершим преобразование

$$\Psi(\mathbf{r}, \sigma) = \sum_n [u_n(\mathbf{r}, \sigma)\gamma_n + v_n^*(\mathbf{r}, \sigma)\gamma_n^+]$$

и наложим обычное условие

$$[\mathscr{H}, \gamma_n] = -\varepsilon_n \gamma_n.$$

Коэффициенты преобразования u и v представляют собой собственные функции следующей системы уравнений:

$$\varepsilon u(\mathbf{r}, \sigma) = \left[\frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} - E_F\right] u(\mathbf{r}, \sigma) + \sum_\mu [U_{\sigma\mu}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mu) + \Delta(\mathbf{r}) \rho_{\sigma\mu} v(\mathbf{r}, \mu)],$$

$$-\varepsilon v(\mathbf{r}, \sigma) = \left[\frac{\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} - E_F\right] v(\mathbf{r}, \sigma) + \sum_\mu [U_{\sigma\mu}^*(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}, \mu) + \Delta^*(\mathbf{r}) \rho_{\sigma\mu} u(\mathbf{r}, \mu)].$$

Нас интересует предельный случай $\Delta \to 0$. В нулевом порядке по Δ система уравнений для u и v сводится к уравнению Шредингера для волновой функции φ_n электрона в нормальном металле

$$\xi\varphi(\mathbf{r}, \sigma) = \left[\frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} - E_F\right] \varphi(\mathbf{r}, \sigma) + \sum_\mu U_{\sigma\mu}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}, \mu) = \mathscr{H}_e \varphi(\mathbf{r}, \sigma).$$

Поэтому

$$u_n^0 = \begin{cases} \varphi_n, & \xi_n > 0, \\ 0, & \xi_n < 0, \end{cases}$$

$$v_n^0 = \begin{cases} 0, & \xi_n > 0, \\ \varphi_n^*, & \xi_n < 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon_n^0 = |\xi_n|.$$

В первом приближении по Δ напишем

$$u_n = u_n^0 + \sum_{m \neq n} a_{nm} \varphi_m,$$

$$v_n = v_n^0 + \sum_{m \neq n} b_{nm} \varphi_m^*.$$

Коэффициенты a_{nm} и b_{nm} можно получить обычным образом по теории возмущений,

$$a_{nm}=\begin{cases}0, & \xi_n>0,\\ -\dfrac{1}{\xi_n+\xi_m}\sum\limits_{\sigma,\mu}\int d\mathbf{r}_2\varphi_m^*(\mathbf{r}_2,\sigma)\rho_{\sigma\mu}\varphi_n^*(\mathbf{r}_2,\mu)\Delta(\mathbf{r}_2), & \xi_n<0,\end{cases}$$

$$b_{nm}=\begin{cases}-\dfrac{1}{\xi_n+\xi_m}\sum\limits_{\sigma,\mu}\int d\mathbf{r}_2\varphi_n(\mathbf{r}_2,\sigma)\rho_{\mu\sigma}\varphi_n(\mathbf{r}_2,\mu)\Delta(\mathbf{r}_2), & \xi_n>0,\\ 0, & \xi_n<0.\end{cases}$$

Подставим теперь найденные выражения для u и v в уравнение самосогласованности для Δ. С учетом спиновых индексов оно принимает вид

$$\Delta(\mathbf{r})=\frac{1}{2}V\sum_{\sigma,\mu}\sum_{n}\rho_{\sigma\mu}v_n^*(\mathbf{r},\sigma)u_n(\mathbf{r},\mu)\left[1-2f(\xi_n)\right].$$

Сохраняя лишь члены, линейные по Δ, мы возвращаемся к знакомому уравнению

$$\Delta(\mathbf{r}_1)=\int K(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\Delta(\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2. \tag{8.11}$$

в котором ядро $K(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ по-прежнему связано с функцией корреляции соотношениями (8.1) и (8.5). Единственное отличие состоит в том, что оператор обращения времени, входящий в выражение (8.5), теперь зависит от спиновых индексов. В явном виде имеем

$$\begin{aligned}K\varphi(\mathbf{r}\uparrow)&=\varphi^*(\mathbf{r}\downarrow),\\ K\varphi(\mathbf{r}\downarrow)&=-\varphi^*(\mathbf{r}\uparrow),\end{aligned} \tag{8.3′}$$

что часто записывают с помощью матриц Паули следующим образом:

$$K=i\sigma_y C,$$

где $C\varphi=\varphi^*$, а матрица $i\sigma_y=\rho$ [см. (8.9)]. Таким образом, во всех случаях, представляющих для нас интерес, задача сводится к изучению зависимости от времени одноэлектронного оператора K в нормальном металле.

На первый взгляд смысл оператора K кажется не совсем ясным. Однако ему можно дать вполне определенную физическую интерпретацию. Рассмотрим, например, случай, когда имеется магнитное поле, действующее лишь на орбитальное движение электрона; зависимость от времени оператора K описывается уравнением (8.7). В выражении (8.1) существенны значения $|\xi-\xi'|\sim k_BT$, следовательно, в функции корреляции $f(\mathbf{r}_1;\mathbf{r}_2;t)$ следует рассматривать интервалы времени $t\sim\hbar/k_BT$. За такое время электрон проходит путь,

значительно превышающий фермиевскую длину волны. Следовательно, движение оператора $K(t)$ мы можем рассматривать *классически* и записать (8.7) в виде

$$\frac{dK(t)}{dt} = -i\frac{d\varphi}{dt}K(t).$$

Отсюда

$$K(t) = e^{-i\varphi(t)}K(0),$$

$$\varphi(t) = \frac{2e}{\hbar mc}\int_0^t \mathbf{A}\cdot\mathbf{p}\,dt. \tag{8.12}$$

Стоящий здесь интеграл берется по классической траектории данного электрона в нормальном металле. Заменив $\mathbf{p}$ на $m\mathbf{v}$ (разностью $e\mathbf{A}/c$ между $\mathbf{p}$ и $m\mathbf{v}$ можно пренебречь по сравнению с величиной фермиевского импульса) в выражении для фазы φ, получим

$$\varphi = \frac{2e}{ch}\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\,dt = \frac{2e}{ch}\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}. \tag{8.13}$$

Расчет функции корреляции $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$ для случая 1 состоит в следующем. Рассмотрим все возможные траектории, двигаясь по которым электрон за интервал времени t попадает из точки $\mathbf{r}_1$ в $\mathbf{r}_2$. (В чистом металле имеется только одна такая траектория, а именно прямая линия, поскольку циклотронный радиус электрона очень велик по сравнению с расстоянием $v_F t$. В более „грязных" системах имеется множество допустимых траекторий в виде ломаных линий.) Вычислим затем для каждой траектории фазовый множитель $e^{i\varphi}$. Искомая функция представляет собой сумму вкладов от отдельных траекторий, каждый из которых берется со статистическим весом, равным вероятности попадания электрона на соответствующую траекторию в результате последовательных актов рассеяния. Таким образом, как и утверждалось ранее, нахождение функции f сводится к рассмотрению транспортных свойств.

Нам осталось получить уравнение движения для оператора $K(t)$ в случае 2 (магнитный сплав). Представим одноэлектронный гамильтониан в виде

$$\mathscr{H}_e = A + \mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_e, \tag{8.14}$$

где член A включает кинетическую энергию электрона и не зависящую от спинов энергию взаимодействия; коэффициент $\mathbf{B}$ определяет суммарную энергию обменного взаимодействия электрона с магнитными примесями. Используя определение (8.3′) для K и аналогичные выражения для сопряженного оператора K^+, легко показать, что

$$K^+\mathscr{H}_e K = A^* - \mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_e. \tag{8.15}$$

Иными словами, оператор $K^{+}\mathscr{H}_{e}K$ можно получить из $\mathscr{H}_{e}$, заменив $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}^{*}$ (это эквивалентно замене $\mathbf{p}\to -\mathbf{p}$) и $\mathbf{S}_{e}$ на $-\mathbf{S}_{e}$. Этот результат можно получить иначе, изменяя знак времени на противоположный во всех величинах, относящихся к электронам проводимости, чем и объясняется название „оператор обращения времени". Замечая, что $K^{+}K = KK^{+} = 1$, можно написать

$$[\mathscr{H}_{e}, K] = \mathscr{H}_{e}K - K\mathscr{H}_{e} = K\left(K^{+}\mathscr{H}_{e}K - \mathscr{H}_{e}\right). \qquad (8.16)$$

Рассмотрим, например, магнитный сплав (случай 2) в отсутствие внешнего поля, т. е. при $A = A^{*}$. Подстановка (8.14) и (8.15) в (8.16) дает

$$\frac{dK(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathscr{H}_{e}, K(t)] = -\frac{2i}{\hbar}K(t)\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_{e}. \qquad (8.17)$$

Подчеркнем, что зависимость $K(t)$ от времени определяется исключительно обменным взаимодействием Г. Как и прежде, мы могли бы попытаться описать ее с помощью зависящей от времени фазы оператора $K(t)$. Однако на практике такой подход не дает желаемых результатов, поскольку теперь мы не можем рассматривать фазу классически; это связано с тем, что потенциал $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ сильно меняется на атомных расстояниях (т. е. на расстояниях порядка фермиевской длины волны электрона проводимости). Позже мы покажем, как можно описать изменение $K(t)$ в подобного рода ситуациях. Прежде чем вдаваться в детали таких расчетов, сначала мы качественно обсудим ряд общих свойств оператора $K(t)$, связанных с характером одноэлектронных траекторий и присущих одновременно случаям 1 и 2.

§ 2. ЭРГОДИЧЕСКОЕ И НЕЭРГОДИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ. БЕСЩЕЛЕВАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Ограничимся пока рассмотрением систем, в которых амплитуда $|\Delta|$ потенциала спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ не зависит от пространственных координат. Благодаря этому предположению обсуждение линеаризованного уравнения (8.11) значительно упрощается и позволяет сразу установить наиболее важные черты явления. Более того, такая постановка задачи имеет не только академический интерес, но и находит применение в ряде конкретных ситуаций. Примером могут служить

1) коллоидные растворы мелких сверхпроводящих частиц;

2) тонкие сверхпроводящие пленки в магнитном поле, параллельном их плоскости;

3) сверхпроводящие сплавы, содержащие магнитные примеси (в отсутствие магнитного поля).

В случае коллоидного раствора амплитуда $|\Delta|$ не будет сильно меняться от точки к точке, если все размеры зерен малы по сравнению с $\xi(T)$. Что касается тонких пленок, то здесь необходимо проявить

некоторую осторожность, поскольку у пленки лишь один размер является малым. В частности, в магнитном поле, перпендикулярном плоскости пленки, в последней могут возникать вихревые нити (как это имеет место в сверхпроводниках второго рода), что приводит к сильным изменениям амплитуды $|\Delta|$ в пространстве [103]. Чтобы избежать этой трудности, будем рассматривать исключительно случай поля, параллельного плоскости пленки. На пленки и на коллоидные частицы налагается также другое ограничение, связанное с тем, что мы с самого начала считаем происходящий переход фазовым переходом второго рода. В сверхпроводниках первого рода это предположение подтверждается на опыте, если размеры образца (толщина в случае пленки) меньше глубины проникновения поля.

Наконец, для магнитного сплава (в отсутствие поля) также разумно принять в качестве исходного предположение о постоянстве $|\Delta|$ (при этом мы не учитываем только малых изменений $\Delta(\mathbf{r})$ вблизи каждой примеси).

Получим теперь уравнение для температуры перехода. Выберем калибровку вектора-потенциала A так, чтобы параметр $\Delta(\mathbf{r})$ в каждой точке принимал вещественное значение (для односвязного образца это всегда можно сделать), т. е. $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta| = \text{const}$. Тогда мы можем проинтегрировать обе стороны уравнения самосогласованности (8.11) по $\mathbf{r}_1$ по объему $\mathcal{V}$; это дает

$$\Delta\mathcal{V} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\,\Delta.$$

Сокращая в этом уравнении множитель $\Delta\mathcal{V}$ и используя (8.1), (8.5), приходим к условию

$$1 = N(0)V \int d\xi\, d\xi' \left[\frac{k_B T}{\hbar}\sum_{\omega} \frac{1}{(\xi - i\hbar\omega)(\xi' + i\hbar\omega)}\right] g\left(\frac{\xi - \xi'}{\hbar}\right),$$

$$g(\Omega) = \int \frac{dt}{2\pi} \langle K^+(0) K(t)\rangle\, e^{-i\Omega t}; \qquad (8.18)$$

здесь $g(\Omega)$ — *спектральная плотность оператора* K. Можно также записать уравнение (8.18) с помощью фермиевской функции распределения $f(\xi)$:

$$1 = N(0)V \int d\xi\, d\xi' \frac{1 - f(\xi) - f(\xi')}{\xi + \xi'} g\left(\frac{\xi - \xi'}{\hbar}\right). \qquad (8.18')$$

[Ряд свойств легче усмотреть из выражения (8.18'), однако при конкретных расчетах более удобным оказывается выражение (8.18).]

Обсуждение уравнения (8.18). В частном случае, когда одноэлектронный гамильтониан $\mathcal{H}_e$ инвариантен относительно обращения времени ($[K(t), \mathcal{H}_e] = 0$, $K(t) \equiv K(0)$), имеем

$$\langle K^+(0) K(t)\rangle \equiv 1,$$

$$g(\Omega) = \delta(\Omega),$$

т. е. спектральная плотность оператора K отлична от нуля лишь при $\Omega = 0$. Уравнение (8.18′) в этом случае, очевидно, сводится к известному уравнению теории БКШ

$$1 = N(0)V \int d\xi \frac{1-2f(\xi)}{2\xi},$$

определяющему температуру перехода чистых (или содержащих немагнитные примеси) сверхпроводников.

При $[K(t), \mathscr{H}_e] \neq 0$ нам придется более детально изучить структуру функции $g(t)$. Мы уже указывали, что нас интересуют значения $\Omega \sim k_B T/\hbar$ и $t \sim \hbar/k_B T$, т. е. главный интерес представляет асимптотическое поведение функции $\langle K^+(0)K(t)\rangle$ для больших времен t. Асимптотическое поведение этой функции может быть самым разнообразным. Наиболее важны для нас следующие два случая:

$$\text{I)} \lim_{t\to\infty} \langle K^+(0)K(t)\rangle = \eta \neq 0, \tag{8.19}$$

$$\text{II)} \lim_{t\to\infty} \langle K^+(0)K(t)\rangle = e^{-t/\tau_K}. \tag{8.20}$$

Фигурирующие здесь параметры η и τ_K определенным образом зависят от величины возмущения (т. е. магнитного поля или концентрации магнитных примесей). Системы, характеризующиеся асимптотическим поведением типа I или II, мы будем называть соответственно неэргодическими или эргодическими в смысле Маркова.

Неэргодические системы

Положим

$$\langle K^+(0)K(t)\rangle = \eta + R(t), \tag{8.21}$$

где функция $R(t)$ быстро убывает со временем. Например, для малых образцов с поведением типа I характерное время убывания функции $R(t)$ составляет $\sim d/v_F$ (d — размер образца, $d \ll \xi_0$, т. е. $d/v_F \ll \hbar/k_B T$). Поэтому в интересующей нас области времен в нулевом приближении членом $R(t)$ можно пренебречь. Тогда уравнение (8.18′) снова принимает вид, подобный уравнению БКШ,

$$1 = N(0)V\eta \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1-2f(\xi)}{2\xi}. \tag{8.22}$$

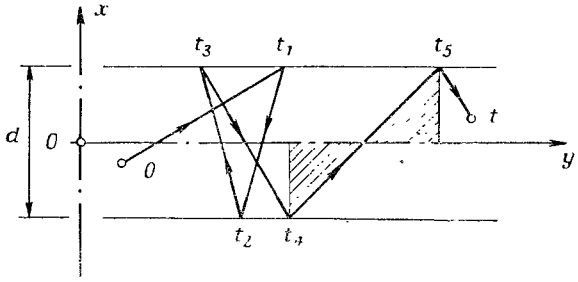
Отсюда температура перехода $T^\star$ равна

$$k_B T^\star = 1{,}14\ \hbar\omega_D e^{-1/N(0)V\eta}. \tag{8.23}$$

Это выражение имеет стандартную форму, характерную для сверхпроводников в отсутствие поля, но в отличие от последних константа связи $N(0)V\eta$ зависит теперь (посредством η) от величины возмущения. В нижеследующей задаче мы обсудим пример конкретной физической системы, поведение которой относится к типу I.

Задача. Найти поведение функции $\langle K^+(0)K(t)\rangle$ при больших временах для тонкой пленки (толщиной d), находящейся в продольном магнитном поле H (Де Жен и Тинкхам [126, 127][1]). Считать, что объемные дефекты отсутствуют, а отражение электронов на границах пленки является диффузным.

Решение. Рассмотрим траекторию электрона, который из начальной точки $\mathbf{r}_0$ (для $t=0$) в результате ряда последовательных соударений с границами пленки при $t=t_1,t_2,\ldots,t_n$ попадает в конечную точку $\mathbf{r}_t$ в момент



Фиг. 67. Траектория электрона в тонкой пленке в случае диффузного характера отражения на границах.

времени t (фиг. 67). Согласно (8.13), результирующая фаза φ равна сумме приращений на отдельных прямолинейных участках пути:

$$\varphi=\Delta\varphi_{01}+\Delta\varphi_{12}+\ldots+\Delta\varphi_{n-1,\,n}+\Delta\varphi_{n,\,t}.$$

В калибровке, в которой параметр Λ вещественен, вектор-потенциал $\mathbf{A}$ имеет лишь одну отличную от нуля компоненту $A_y=Hx$. Тогда легко видеть, что в этой калибровке все приращения, за исключением $\Delta\varphi_{01}$ и $\Delta\varphi_{n,\,t}$, равны нулю. Именно

$$\Delta\varphi_{p,\,p+1}=\frac{2eH}{c\hbar}\int\limits_{x=-d/2}^{x=d/2}x\,dy=0,$$

поскольку траектория между двумя последовательными соударениями представляет собой прямую линию (координата y является линейной функцией x), а интегрирование ведется в симметричных пределах (см. фиг. 67). Таким образом,

$$\varphi=\Delta\varphi_{01}+\Delta\varphi_{n,\,t}.$$

Далее, для интересующих нас времен $t\gg d/v_F$ число соударений n велико поэтому можно считать, что корреляция между временными интервалами

[1]) См. также работу Шаповала [128]. — *Прим. ред.*

$0 \to t_1$ и $t_n \to t$ отсутствует. Иными словами

$$\eta = \langle e^{i\Delta\varphi_{01}} \rangle \langle e^{i\Delta\varphi_{n,t}} \rangle,$$

$$\eta^{1/2} = \langle e^{i\Delta\varphi_{01}} \rangle \text{ при } t \to \infty.$$

Значение η, вообще говоря, не равно нулю; несмотря на бесчисленные хаотические столкновения электронов с поверхностью, система является *неэргодической* в определенном выше смысле. В полученном выражении для η необходимо теперь произвести усреднение по всевозможным начальным положениям $\mathbf{r}_0$, а также по всевозможным направлениям (при заданной величине v_F) начальной скорости электрона, для чего удобно ввести угол ψ между направлением проекции скорости на плоскость xy и направлением оси x. Приведем эти вычисления

$$\eta^{1/2} = \frac{1}{\pi d} \int\limits_{-d/2}^{d/2} dx \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi e^{i\pi (H/\phi_0)(d^2/4 - x^2) \operatorname{tg} \psi} =$$

$$= \frac{2}{d} \int\limits_0^{d/2} dx\, e^{(\pi H/\phi_0)[(x^2 - d^2/4)]},$$

где $\phi_0 = ch/2e$ — квант потока. Приведем результат для двух предельных случаев:

$$\eta = \begin{cases} 1 - \dfrac{\pi}{3} \dfrac{H}{\phi_0} d^2 & \text{при } H \ll \dfrac{\phi_0}{d^2}, \\ \left(\dfrac{2\phi_0}{\pi H d^2} \right)^2 & \text{при } H \gg \dfrac{\phi_0}{d^2}. \end{cases}$$

Эргодические (марковские) системы

Если для больших времен t выполняется экспоненциальный закон (8.20), мы можем написать

$$g(\Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau_K}{1 + \Omega^2 \tau_K^2}. \tag{8.24}$$

Подставляя это выражение в (8.18) и интегрируя по ξ и ξ', приходим к уравнению

$$1 = N(0) V \frac{2\pi k_B T^*}{h} \sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega| + 1/\tau_K}. \tag{8.25}$$

Здесь сумма по ω расходится. Это объясняется тем, что мы не учли обрезания взаимодействия на дебаевской частоте ω_D [см. обсуждение уравнения (7.28) на стр. 218] С учетом обрезания выражение (8.25) принимает вид

$$1 = N(0) V \left[\ln \left(\frac{1{,}14 \hbar \omega_D}{k_B T^*} \right) + \frac{2\pi k_B T^*}{h} \sum_{\omega} \left(\frac{1}{2|\omega| + 1/\tau_K} - \frac{1}{2|\omega|} \right) \right]. \tag{8.2}$$

Эта сумма теперь сходится. Результат удобно выразить через табулированную функцию

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-0{,}577-\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+z}\right),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Тогда

$$\frac{2\pi k_B T^*}{\hbar}\sum_{\omega}\left(\frac{1}{2|\omega|+1/\tau_K}-\frac{1}{2|\omega|}\right)=\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\hbar}{4\pi\tau_K k_B T^*}\right).$$

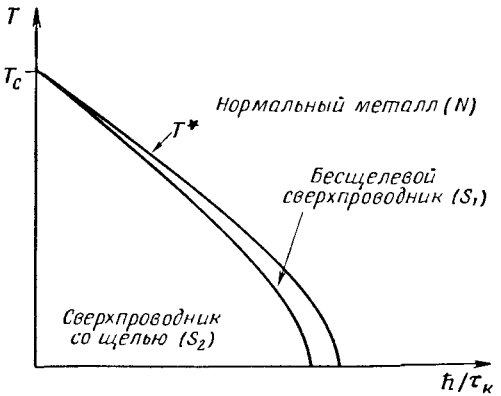
Окончательно связь между $1/\tau_K$ и T^* в неявной форме дается выражением

$$\ln\frac{T_c}{T^*}=-\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\hbar}{4\pi\tau_K k_B T^*}\right). \tag{8.26}$$

Соотношение такого вида весьма часто встречается в теории сверхпроводимости, поэтому мы введем для него специальное обозначение

$$\frac{\hbar}{\tau_K}=k_B T_c \mathrm{Un}\left(\frac{T^*}{T_c}\right). \tag{8.26'}$$

„Универсальная" функция $\mathrm{Un}(x)$ показана на фиг. 68. При $x\to 0$ имеем $\mathrm{Un}(x)\to 1{,}76$ и $\hbar/\tau_K\to 1{,}76 k_B T_c=\Delta_0$ (где Δ_0 — значение



Фиг. 68. Фазовая диаграмма сверхпроводника при наличии «асимметричного» возмущения для эргодической системы.

Величина возмущения пропорциональна $\hbar/\tau_K$. Температура T^* (верхняя кривая) обращается в нуль при $\hbar/\tau_K=1{,}76\, k_B T_c$.

энергетической щели в теории БКШ для чистого сверхпроводника в отсутствие поля при $T=0$). При $x\to 1$ имеем

$$\mathrm{Un}(x)\to\frac{\pi}{8}(1-x), \tag{8.27}$$

$$\frac{\hbar}{\tau_K}\approx\frac{\pi}{8}k_B(T_c-T^*)\quad\text{при}\quad\frac{1}{\tau_K}\to 0\qquad(T^*\to T_c).$$

Примеры „эргодических" систем

Приведем ряд примеров систем, которые являются эргодическими:

а) мелкие коллоидальные частицы в поле H;

б) тонкие „грязные" пленки в поле H, параллельном поверхности (как было показано выше, для пленок со строго постоянной толщиной одного рассеяния на поверхности недостаточно для выполнения условия эргодичности);

в) тонкие пленки с нерегулярной толщиной в поле H;

г) сплавы, содержащие магнитные примеси.

В следующих двух задачах мы подробно остановимся на вычислениях параметра τ_K для конкретных марковских систем. В частности, полученная в первой задаче зависимость τ_K от магнитного поля позволяет найти с помощью (8.26) критическое поле образцов малых размеров как функцию температуры.

Задача. Определить τ_K для „грязных" образцов малых размеров и произвольной формы, находящихся во внешнем магнитном поле H (Маки [129]).

Решение. Рассмотрим образец, размеры d которого велики по сравнению с длиной свободного пробега электронов l. Кроме того, на величину d налагается (сверху) другое важное ограничение, связанное с требованием постоянства амплитуды параметра порядка ($|\Delta| = \text{const}$) во всем объеме образца. Действительно, при больших значениях d, как мы знаем, при H, близком к полю образования зародышей H_{c2} (или H_{c3}), сверхпроводящая фаза существенно неоднородна, т. е. параметр Δ сильно зависит от пространственных координат. Размер неоднородностей по порядку величины равен

$$\xi(T) \sim \sqrt{\xi_0 l}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{-1/2},$$

где $\xi_0 = 0{,}18\ (\hbar v_F/k_B T_c)$. Условие $|\Delta| = \text{const}$ приводит к неравенству

$$d < \sqrt{\xi_0 l}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}.$$

Окончательное условие

$$l < d < \sqrt{\xi_0 l}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$$

накладывает довольно жесткие ограничения на допустимые значения d. Тем не менее этот случай представляет принципиальный интерес, поскольку он является простейшим примером эргодического поведения.

Если исходить из представления об одноэлектронных траекториях, то условие $d < \sqrt{\xi_0 l}$ означает, что средний путь $\sqrt{Dt}$ ($D = v_F l/3$ — коэффициент диффузии), проходимый электроном за время $t \sim \hbar/k_B T_c$, велик по сравнению с размерами образца. Следовательно, за время t электрон успеет побывать во всех точках образца. В соответствии с этим мы будем считать приращение фазы на отдельных участках пути случайной величиной и пользоваться для вычисления результирующей фазы $\varphi(t)$ распределением Гаусса. Тогда получаем

$$\langle e^{i\varphi(t)}\rangle = e^{-1/2\langle\varphi^2(t)\rangle}.$$

Используя (8.13), запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t')\, dt',$$

где $\omega = 2e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}/\hbar c$. Для времен t, больших по сравнению со средним временем между последовательными соударениями $\tau = l/v_F$, имеем

$$\langle\varphi^2\rangle \to 2t\int_0^\infty \langle\omega(0)\,\omega(t')\rangle\, dt' \quad \text{для } t \gg \tau.$$

Для траекторий, начинающихся в точке $\mathbf{r}$, можно написать

$$\langle\omega(0)\,\omega(t')\rangle = \left(\frac{2e}{\hbar c}\right)^2 \sum_{\alpha,\beta} A_\alpha(\mathbf{r})\, A_\beta(\mathbf{r}')\, \langle v_\alpha(0)\, v_\beta(t')\rangle =$$

$$= \left(\frac{2e}{\hbar c}\right)^2 A^2(\mathbf{r})\,\frac{v_F^2}{3}\, e^{-t'/\tau} \qquad (\alpha, \beta = x, y, z).$$

поскольку за время порядка τ изменение координаты $\mathbf{r}$ вдоль траектории пренебрежимо мало ($\sim l$) по сравнению с характерным расстоянием ($\sim d$), на котором меняется вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. В результате имеем

$$\langle e^{i\varphi(t)}\rangle = e^{-t/\tau_K} \text{ при } t \gg \tau,$$

$$\frac{1}{\tau_K} = \frac{1}{3}\tau\left(\frac{2ev_F}{\hbar c}\right)^2 \langle A^2(\mathbf{r})\rangle$$

(среднее от A^2 берется по объему образца). Подчеркнем, что выбор калибровки для $\mathbf{A}$ фиксирован условием $\Delta = \text{const}$. Для некоторых простейших геометрий калибровку можно найти непосредственно.

1. Тонкая пленка толщиной d (вдоль оси x) находится в однородном поле H, направленном по оси z. В отсутствие суммарного тока в пленке

$$A_x = A_z = 0,$$
$$A_y = Hx$$

(расстояние x измеряется от середины пленки). Отсюда находим

$$\langle A^2\rangle = \frac{H^2d^2}{12}.$$

2. Для сферического образца малого радиуса R в однородном поле $\mathbf{H}$ имеем

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathbf{r}\times\mathbf{H},$$
$$\langle A^2\rangle = \frac{H^2R^2}{10}.$$

Задача. Вычислить τ_K для сплава, содержащего парамагнитные примеси (Абрикосов и Горьков [125]).

Решение. Здесь мы приведем довольно нестрогий расчет. Будем исходить из выражений

$$g(\Omega) = \sum_m \overline{|\langle n|K|m\rangle|^2}\,\delta\left(\frac{\xi_n - \xi_m}{\hbar} - \Omega\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\tau_K}{1+\Omega^2\tau_K^2},$$

где усреднение производится по одноэлектронным состояниям при заданной энергии ξ_n (фактически по поверхности Ферми). Возьмем $\Omega \gg 1/\tau_K$ (однако $\Omega \ll E_F/\hbar$), тогда $g(\Omega) \sim 1/\pi\Omega^2\tau_K$ и можно написать

$$\frac{1}{\tau_K} = \pi\hbar \sum_m \overline{|\langle n|K|m\rangle|^2\Omega^2\delta(\xi_n - \xi_m - \hbar\Omega)} =$$

$$= \frac{\pi}{\hbar} \sum_m \overline{|\langle n|K|m\rangle|^2 (\xi_n - \xi_m)^2\delta(\xi_n - \xi_m - \hbar\Omega)} =$$

$$= \frac{\pi}{\hbar} \sum_m \overline{|\langle n|[\mathscr{H}_e, K]|m\rangle|^2\delta(\xi_n - \xi_m - \hbar\Omega)}.$$

Коммутатор $[\mathscr{H}_e, K]$ мы уже вычислили раньше [см. (8.17)]:

$$[\mathscr{H}_e, K] = -2K\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_e,$$

где

$$\mathbf{B} = \sum_i \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\,\mathbf{S}_i.$$

С точностью до членов *второго порядка* по взаимодействию электрона с примесями можно заменить точные одноэлектронные состояния $|n\rangle$ и $|m\rangle$ плоскими волнами вида

$$\varphi_n \to L^{-3/2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\tau_K} = \frac{\pi}{2\hbar} \sum_{\sigma,\mu} \sum_{\mathbf{k}'} |\langle\sigma\mathbf{k}|2\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_e|\mu\mathbf{k}'\rangle|^2\delta(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}'} - \hbar\Omega).$$

Суммирование по спиновым индексам σ и μ выполняется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\mu}\langle\sigma|(S_e)_x|\mu\rangle\langle\mu|(S_e)_x|\sigma\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\sigma}\langle\sigma|(S_e)_x^2|\sigma\rangle = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\mu}\langle\sigma|(S_e)_x|\mu\rangle\langle\mu|(S_e)_y|\sigma\rangle = 0$$

и т. д. Используя выражение для $\mathbf{B}$, представим орбитальную часть матричных элементов в виде

$$\langle\mathbf{k}|\mathbf{B}|\mathbf{k}'\rangle = L^{-3}\sum_i \mathbf{S}_i e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_i}\Gamma(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

где

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\Gamma(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

Далее, возводя в квадрат и удерживая лишь члены вида S_iS_i (принимаем, что корреляция между спинами различных примесей отсутствует), получаем

$$\frac{1}{\tau_K} = \frac{\pi}{\hbar}\frac{n}{L^3}\frac{S_i(S_i+1)}{3}\sum_{\mathbf{k}'}|\Gamma(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2\delta(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}'} - \hbar\Omega),$$

где n — число атомов примеси в единице объема. Фигурирующая здесь сумма по $\mathbf{k}'$ слабо зависит от $\hbar\Omega$ (при $\hbar\Omega \ll E_F$), и поэтому мы можем

перейти к пределу $\hbar\Omega \to 0$, а также положить $\xi_{\mathbf{k}} = 0$, т. е. вычислить $1/\tau_K$ на поверхности Ферми[1]). В результате получаем

$$\frac{1}{\tau_K} = \frac{\pi n S_i (S_i+1) N(0)}{3\hbar} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}'}}{4\pi} |\Gamma(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2,$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}'}$ — элемент телесного угла в направлении $\mathbf{k}'$, а $k = k' = k_F$. Обозначая через x атомную концентрацию примеси и вводя атомный объем a^3 (так что $n = x/a^3$), находим

$$N(0) \sim \frac{1}{a^3 E_F}, \quad \Gamma(q) \sim \Gamma a^3.$$

Следовательно,

$$\frac{\hbar}{\tau_K} \sim x \frac{\Gamma^2}{E_F}.$$

Несколько замечаний по поводу этой формулы.

1. При малых x величина $1/\tau_K$ также мала. Это позволяет использовать разложение (8.27) для нахождения температуры перехода $T^\star$. Качественно имеем

$$k_B (T_c - T^\star) \sim x \frac{\Gamma^2}{E_F},$$

т. е. температура $T^\star$ очень быстро убывает при добавлении магнитных примесей. Действительно, беря типичные значения $\Gamma \sim 0{,}2$ *эв*, $E_F \sim 2$ *эв* ($\Gamma^2/E_F \sim 2 \cdot 10^2$°K), мы видим, что уже при $x \sim 10^{-2}$ уменьшение температуры $T^\star$ составляет ~ 2°K. Такое быстрое понижение температуры перехода наблюдалось на опыте. Оно используется на практике в качестве наиболее чувствительного метода для проверки того, является ли данная примесь в той или иной матрице магнитной или нет.

2. Проведенные вычисления справедливы лишь при условии $x(\Gamma^2/E_F) \ll k_B T_c$. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее. Наличие обменного взаимодействия Γ между электронами проводимости и магнитными примесями приводит к появлению косвенного взаимодействия самих примесей, имеющего вид

$$H_{ij} = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \frac{\Gamma^2}{E_F} f(k_F R_{ij}),$$

где $E_F = \hbar^2 k_F^2/2m$ — энергия Ферми для электронов проводимости, а $f(k_F R)$ — безразмерная функция, которая на больших расстояниях ведет себя как $(k_F R)^{-3} \cos(2k_F R)$ (Рудерман и Киттель [130]). Взаимодействие H_{ij} приводит к тому, что при низких температурах происходит магнитное упорядочение (ферро- или антиферромагнитное) спинов примесей. Температура этого перехода (температура Кюри) $T_K = x(\Gamma^2/k_B E_F)$, очевидно, должна быть мала по сравнению с температурой сверхпроводящего перехода ($T_K \ll T_c$). При этих условиях

а) спин данной примеси слабо связан со всеми остальными и его направление почти не меняется со временем (статическая модель);

---

[1]) В связи с предельным переходом $\Omega \to 0$ в окончательном выражении отметим, что первоначальное ограничение на величину Ω ($\gg 1/\tau_K$) является в действительности несущественным и понадобилось нам лишь при замене точных состояний на невозмущенные ($|n\rangle \to |\mathbf{k}\rangle$).

б) эффект корреляции спинов соседних примесей имеет порядок T_K/T_c, т. е. пренебрежимо мал (спины независимы).

3. Добавление к одноэлектронному гамильтониану $\mathscr{H}_e$ члена, описывающего спин-орбитальное взаимодействие, не меняет величины $1/\tau_K$. Это ясно без вычислений, поскольку спин-орбитальное взаимодействие инвариантно относительно обращения времени. Укажем в этой связи на существенное отличие времени τ_K от времени релаксации ядерного спина T_1, в которое эффекты спин-орбитальной связи вносят соответствующий вклад.

4. Весь расчет справедлив с точностью до членов $\sim\Gamma^2$. В более высоких приближениях картина усложняется из-за так называемого „эффекта Кондо" [131].

Бесщелевая сверхпроводимость

При температурах, несколько меньших температуры перехода T^* [см. (8.26)], параметр Δ отличен от нуля, но все еще мал. Тогда мы можем рассматривать его как возмущение и вычислить спектр возбуждений ε_n квазичастиц в сверхпроводящей фазе. Как обычно, для нахождения энергии ε с точностью до членов $\sim\Delta^2$ достаточно знать коэффициенты u и v в первом порядке по Δ. Используя значения u и v, полученные при выводе соотношения (8.11), находим

$$\varepsilon_n = |\xi_n| + |\Delta|^2 \sum_m{}' \frac{|\langle n|K|m\rangle|^2}{\xi_n+\xi_m} \tag{8.28}$$

(штрих у знака суммы означает, что при переходе к интегрированию по ξ надлежит взять главную часть при $\xi_n = -\xi_m$).

Если одноэлектронный гамильтониан $\mathscr{H}_e$ инвариантен относительно обращения времени $[\mathscr{H}_e, K] = 0$, то матричный элемент $\langle n|K|m\rangle$ отличен от нуля лишь при $\xi_n = \xi_m$ и равен нулю во всех остальных случаях. Тогда при малых значениях ξ_n энергетический знаменатель, равный $2\xi_n$, тоже мал и поправка к энергии расходится, что говорит о непригодности теории возмущений. Причина этой расходимости, очевидно, связана с наличием у сверхпроводников энергетической щели. Сказанное относится к любой неэргодической системе.

Напротив, для эргодических систем матричный элемент $\langle n|K|m\rangle$ не имеет особенности при $\xi_n = \xi_m$ и отличен от нуля во всей полосе шириной $|\xi_n - \xi_m| \sim \hbar/\tau_K$, так что точки $\xi_n = \xi_m$ ничем не выделены. По этой причине обращение в нуль величины ξ_n или ξ_m в знаменателе выражения (8.28) не играет роли и *применение теории возмущений оправдано*. Параметром разложения служит величина $\Delta\tau_K/\hbar$ вместо отношения $\Delta/|\xi_n|$ в предыдущем случае. Чтобы найти энергию ε_n в явном виде, воспользуемся выражением (8.24) для спектральной плотности оператора K и перейдем в (8.28) от суммы

к интегралу

$$\varepsilon = |\xi| + |\Delta|^2 \mathrm{P} \int g\left(\frac{\xi - \xi'}{\hbar}\right) \frac{d\xi'}{\xi + \xi'} =$$

$$= |\xi| + \frac{2|\Delta|^2 |\xi|}{(2\xi)^2 + (\hbar/\tau_K)^2} \quad \text{при} \quad \frac{\Delta\tau_K}{\hbar} \ll 1. \tag{8.29}$$

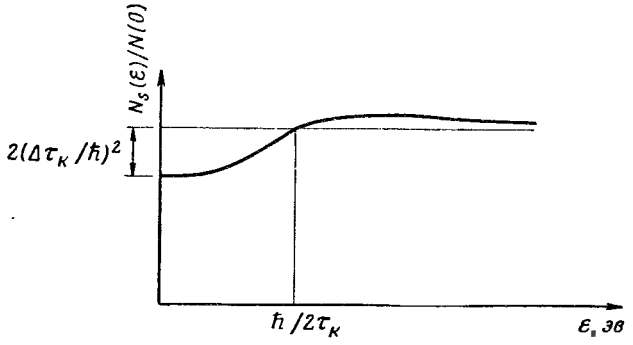
(Символ P означает, что интеграл берется в смысле главного значения.) Для $\xi \gg \hbar/\tau_K$ формула дает результат БКШ для обычных сверхпроводников $\left(\varepsilon \approx \xi + \Delta^2/2\xi \approx \sqrt{\Delta^2 + \xi^2}\right)$. В пределе $\xi \to 0$ энергия возбуждений линейно стремится к нулю

$$\varepsilon \to \xi\left[1 + 2\left(\frac{\Delta\tau_K}{\hbar}\right)^2\right].$$

Следовательно, *щель в спектре возбуждений отсутствует*. Результат (8.29) можно выразить также с помощью плотности состояний $N_s(\varepsilon)$. С точностью до членов порядка Δ^2 имеем

$$N_s(\varepsilon) = N(0)\frac{\partial\xi}{\partial\varepsilon} \approx N(0)\left\{1 + 2\left(\frac{\Delta\tau_K}{\hbar}\right)^2 \frac{(2\varepsilon)^2 - (\hbar/\tau_K)^2}{[(2\varepsilon)^2 + (\hbar/\tau_K)^2]^2}\right\}. \tag{8.30}$$

Отсюда видно, что при $\varepsilon < \hbar/2\tau_K$ плотность состояний $N_s(\varepsilon)$ меньше значения $N(0)$ в нормальном металле и всюду остается конечной (фиг. 69).



Фиг. 69. Плотность состояний для возбуждений фермиевского типа как функция их энергии в случае бесщелевой сверхпроводимости.

Такая зависимость имеет место, если потенциал спаривания Δ мал по сравнению с $\hbar/\tau_K$. Отметим, что роль характерной энергии играет величина $\hbar/\tau_K$ (а не $\Delta \ll \hbar/\tau_K$).

Тем не менее, несмотря на отсутствие энергетической щели, материал остается сверхпроводящим. Например, путем непосредственного вычисления можно показать, что экранирующие токи в образце, вызванные приложенным полем H, отличны от нуля и имеют обычную величину порядка $\sim \Delta^2$.

Это замечательное явление „бесщелевой сверхпроводимости" имеет место, однако, лишь в узкой области значений Δ, в которой ряд теории возмущений сходится (а именно при $\Delta\tau_K/\hbar < 1$). При возрастании Δ щель появляется снова. Сказанное можно пояснить с помощью диаграммы, на которой по оси абсцисс отложена величина $\hbar/\tau_K$ (т. е. величина взаимодействия), а по оси ординат — температура (см. фиг. 68). На этой диаграмме имеются три области: нормальная область (N), область бесщелевой сверхпроводимости (S_1) и область обычной сверхпроводимости со щелью (S_2). Граница между N и S_1 описывается универсальной функцией (8.26′). Граница между S_1 и S_2 находится гораздо сложнее (на нашем языке для этого надо суммировать весь ряд теории возмущений по Δ).

В настоящее время имеется ряд опытных данных, свидетельствующих в пользу существования области S_1 в магнитных сплавах (см., например, работы Райфа и Вулфа [132, 133], в которых с помощью туннельной методики изучался подвергнутый закалке твердый раствор InFe). К сожалению, в области $x(\Gamma^2/E_F) \sim k_B T_c$, представляющей наибольший интерес, спины примесей быстро прецессируют в результирующем обменном поле, что сильно усложняет анализ любых опытных данных, полученных на магнитных сплавах. Область S_1 должна также проявляться при измерениях на сверхпроводящих коллоидальных частицах и тонких пленках в магнитном поле, параллельном их плоскости. Однако здесь также имеются трудности, вызванные значительными погрешностями при определении размеров малых образцов, от которых зависит величина τ_K[1]). Чтобы иметь возможность наблюдать область S_1, величина τ_K должна фиксироваться с точностью до нескольких процентов, что выходит за пределы современных возможностей. Более реальные примеры бесщелевой сверхпроводимости приводятся в § 3, где рассматривается случай, когда величина $|\Delta|$ может зависеть от пространственных координат.

§ 3. „ГРЯЗНЫЙ" СВЕРХПРОВОДНИК В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь „грязный" сплав, в котором имеются только немагнитные примесные атомы. Точнее говоря, будем считать, что длина свободного пробега l меньше длины когерентности $\xi_0 = 0{,}18(\hbar v_F/k_B T_c)$ и, кроме того, меньше любого размера образца d. Предположим также, что образец (произвольной формы) вдоль всей поверхности покрыт изолятором, так что ни в одной точке он не

[1]) Обычно к указываемым в экспериментальных работах размерам малых образцов нужно относиться с известной осторожностью. Например, „пленка толщиной 500 Å" обычно представляет собой весьма неравномерный слой с шероховатостями порядка 100 Å или более.

находится в контакте с нормальным металлом. Относительно зависимости амплитуды $|\Delta|$ от координат мы не будем делать никаких конкретных допущений.

Покажем сейчас, что при сделанных предположениях интегральное уравнение (7.8) можно заменить дифференциальным уравнением второго порядка, которое является обобщением линеаризованного уравнения Гинзбурга — Ландау *на любые температуры*. Такое упрощение возможно главным образом потому, что транспортные свойства нормального металла описываются дифференциальным уравнением второго порядка типа диффузионного уравнения.

Согласно (8.1) — (8.5), ядро $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ уравнения (7.8) связано простым образом с функцией корреляции $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$. Нетрудно получить дифференциальное уравнение, которым описывается функция f в предельном случае очень „грязного" сплава. Рассмотрим для этого два близких момента времени $t > 0$ и $t + \varepsilon$ (разность ε мала). За время ε частица в процессе диффузии перемещается из точки $\mathbf{r}'$ (где она находилась в момент времени t) в точку $\mathbf{r}_1$. Поскольку расстояние между $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}'$ мало, для приращения фазы $\Delta\varphi$ оператора $K(t)$ можно написать

$$\Delta\varphi = \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}').$$

По определению,

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t + \varepsilon) = \int d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2; t) \mathscr{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}' | \varepsilon) e^{i\Delta\varphi}, \qquad (8.31)$$

где $\mathscr{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}' | \varepsilon)$ — функция источника. Она описывает распределение частиц, находившихся первоначально в точке $\mathbf{r}_1$, по прошествии времени ε и удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial \mathscr{D}}{\partial \varepsilon} = D\nabla'^2 \mathscr{D}, \quad \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$$

с начальным условием

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}' | \varepsilon) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')$$

и условием $(\nabla' \mathscr{D})_n = 0$ на поверхности образца. Например, в случае неограниченной среды эта функция имеет вид

$$\mathscr{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}' | \varepsilon) = \frac{1}{(4\pi D\varepsilon)^{3/2}} e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|^2/4D\varepsilon}.$$

Разложив функцию $f(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2; t)$ в ряд Тейлора вблизи точки $\mathbf{r}_1$, выделив обычным образом в уравнении (8.31) члены первого порядка по ε (напомним, что $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|^2 \sim \varepsilon$) и приравняв соответствующие коэффициенты с обеих сторон, получим искомое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\left(\nabla_1 - \frac{2ie}{c}\mathbf{A}\right)^2 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) \quad \text{при} \quad t > 0. \qquad (8.32)$$

Соответственно граничное условие на поверхности образца принимает вид

$$\mathbf{n}\cdot\left(\nabla_1-\frac{2ie}{c}\mathbf{A}\right)f=0, \tag{8.33}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Наконец, при $t\to 0$ функция f должна переходить в δ-функцию от координат (с соответствующим нормировочным множителем). Исходя из определения (8.2), легко видеть, что

$$f(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2;\ 0)=\mathcal{V}^{-1}\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1), \tag{8.34}$$

где $\mathcal{V}$ — объем образца.

Предположим теперь, что нам известна система нормированных собственных функций $g_p(\mathbf{r})$ линейного оператора в правой части (8.32)

$$-D\left(\nabla-\frac{2ie}{c}\mathbf{A}\right)^2 g_p(\mathbf{r})=\frac{\varepsilon_p}{\hbar}g_p(\mathbf{r}) \tag{8.35}$$

с граничным условием (8.33). Разложим δ-функцию в (8.34) в ряд по функциям g; тогда для $t>0$ получим

$$f(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2;\ t)=\mathcal{V}^{-1}\sum_p g_p^*(\mathbf{r}_2)g_p(\mathbf{r}_1)e^{-\varepsilon_p t/\hbar}. \tag{8.36}$$

Подставляя (8.36) в (8.1) и интегрируя по t, находим

$$K(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)=k_BT\sum_\omega 2\pi N(0)V\sum_p g_p^*(\mathbf{r}_2)g_p(\mathbf{r}_1)\frac{1}{2\hbar|\omega|+\varepsilon_p}. \tag{8.37}$$

С помощью (8.37) исходному уравнению (8.8) можно придать вид

$$\Delta(\mathbf{r}_1)=2\pi k_BTN(0)V\sum_\omega\sum_p\frac{1}{2\hbar|\omega|+\varepsilon_p}g_p(\mathbf{r}_1)\int g_p^*(\mathbf{r}_2)\Delta(\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2. \tag{8.38}$$

Собственными функциями этого линейного интегрального уравнения относительно Δ, очевидно, служат функции g. Действительно, положим в уравнении (8.38) $\Delta(\mathbf{r})=g_q(\mathbf{r})$; тогда вследствие условия ортогональности функций g в сумме по p отличен от нуля единственный член с $p=q$ и уравнение (8.38) удовлетворяется, если выполнено условие

$$1=2\pi k_BTN(0)V\sum_\omega\frac{1}{2\hbar|\omega|+\varepsilon_q}. \tag{8.39}$$

Используя определение универсальной функции $\mathrm{Un}(x)$ [см. (8.26) и (8.26′)], решение уравнения (8.39) запишем в уже знакомом нам виде

$$\varepsilon_q=k_BT_c\,\mathrm{Un}\left(\frac{T}{T_c}\right).$$

При фиксированном значении поля H и заданной форме образца величины ε_q также фиксированы [в принципе их можно вычислить, решив уравнения (8.35), хотя этот расчет довольно трудоемок]. Обычно интерес представляет наиболее высокая температура T^* (для заданной величины поля H), при которой уравнение (8.38) имеет нетривиальное решение. Поскольку функция $\mathrm{Un}(x)$ является монотонно убывающей, ясно, что это решение должно отвечать *наименьшему собственному* значению ε_0.

Расчет поля, при котором в „грязном" образце произвольной формы впервые образуется сверхпроводящий зародыш, производится следующим образом. В первую очередь необходимо решить уравнения (8.35) и (8.33) и найти *наименьшее собственное значение* ε_0 как функцию поля H. Тогда интересующая нас величина поля образования зародыша H^* при заданной температуре T может быть легко получена из соотношения

$$\frac{\varepsilon_0(H^*)}{k_B T_c} = \mathrm{Un}\left(\frac{T}{T_c}\right). \tag{8.40}$$

Задача. Вывести формулу для критического поля H_{c2} „грязного" сверхпроводника, пригодную при любых температурах [127, 129, 134, 135].

Р е ш е н и е. Уравнение (8.35) имеет вид уравнения Шредингера для частицы с массой $\hbar/2D$ и зарядом $2e$ в магнитном поле H. Циклотронная частота движения такой частицы определяется соотношением

$$\omega_c = \frac{4eD}{c\hbar} H = 4\pi \frac{D'I}{\phi_0}$$

где ϕ_0 — квант потока. Наинизшее собственное значение равно

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_c.$$

Полагая в (8.40) $H^* = H_{c2}$ и используя соотношение $\varepsilon_0 = \mathrm{Un}(T/T_c)$, придем к следующему уравнению:

$$\ln\frac{T_c}{T} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\hbar D H_{c2}}{2\phi_0 k_B T}\right).$$

Чтобы решить это уравнение, рассмотрим сначала температуры T, *близкие* к T_c. В этом случае поле H_{c2} мало и для $\mathrm{Un}(x)$ можно использовать разложение (8.27). При этом получаем

$$H_{c2} = \frac{4k_B(T_c - T)\phi_0}{\pi^2 \hbar D} \quad \text{при } T \gtrsim T_c.$$

Легко проверить, что это согласуется с выражением Гинзбурга — Ландау $H_{c2} = \varkappa\sqrt{2}H_c$, если в него подставить значение $\varkappa$ (7.47), полученное Горьковым [115] для предельного случая „грязного" сверхпроводника,

$$\varkappa = 0{,}75\frac{\lambda_L(0)}{l} \quad \text{при } l \ll \xi_0.$$

С другой стороны, при $T = 0$

$$\frac{2\pi\hbar D H_{c2}}{\phi_0} = k_B T_c \mathrm{Un}(0) = 1{,}76\, k_B T_c = \Delta_{00}.$$

Напишем также выражение для критического поля H_{c0} массивного сверхпроводника $\left(H_{c0}^2/8\pi = N(0)\Delta_{00}^2/2\right)$ в виде

$$H_{c0} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\phi_0}{\pi^2\xi_0\lambda_L(0)} \qquad (T=0).$$

Сравнивая эти два выражения, находим

$$\frac{H_{c2}(T=0)}{\sqrt{2}H_{c0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\lambda_L(0)}{l} = 0{,}87\,\frac{\lambda_L(0)}{l}.$$

Таким образом, отношение $H_{c2}/\sqrt{2}H_c$ возрастает всего лишь на 20% при изменении температуры от $T = T_c$ до $T = 0$. Аналогичные вычисления показывают, что для плоской границы отношение H_{c3}/H_{c2} остается равным 1,69 при всех температурах. Кроме того, если поле H составляет угол θ с поверхностью образца, форма угловой зависимости $H_{c3}(\theta)/H_{c2}(0)$ тоже не зависит от температуры. Все эти выводы подтверждаются экспериментально. Заметим, что факт применимости линеаризованной теории Гинзбурга — Ландау к описанию „грязных" сплавов при низких температурах является довольно неожиданным.

Теорема о локальной плотности состояний

Дальнейший анализ для температур, лежащих немного ниже температуры перехода T^*, можно провести совершенно аналогично тому, как это делалось в § 2. В частности, мы можем вычислить плотность состояний $N_s(\mathbf{r}, \varepsilon)$ для возбуждений с энергией ε. Прежде всего, поскольку параметр $\Delta(\mathbf{r})$ теперь меняется в пространстве, плотность состояний, очевидно, зависит от положения точки наблюдения $\mathbf{r}$ [1]). Конкретный расчет [127] показывает, что во втором порядке по $|\Delta|$ функция $N_s(\mathbf{r}, \varepsilon)$ обладает следующими простыми свойствами.

1. Плотность состояний $N_s(\mathbf{r}, \varepsilon)$ в точке $\mathbf{r}$ зависит лишь от значения $\Delta(\mathbf{r})$ в той же точке. Такая локальная связь на первый взгляд представляется удивительной, поскольку в исходном выражении величина $N_s(\mathbf{r}, \varepsilon)$ в точке $\mathbf{r}$ зависит от значений $\Delta(\mathbf{r}')$, где точка $\mathbf{r}'$ находится от $\mathbf{r}$ на расстоянии порядка $\xi(T)$. Это объясняется следующим образом. Вблизи температуры перехода функция $\Delta(\mathbf{r})$ имеет простой вид, а именно пропорциональна собственной функции $g_0(\mathbf{r})$ уравнения (8.35). Благодаря этому мы можем выполнить интегрирование в выражении для $N_s(\mathbf{r}, \varepsilon)$, так что окончательный результат оказывается зависящим лишь от $\Delta(\mathbf{r})$.

2. Явный вид $N_s(\mathbf{r}, \varepsilon)$ дается выражением (8.30), в котором под величиной Δ нужно понимать локальное значение параметра $\Delta(\mathbf{r})$. Кроме того, фигурирующий в этой формуле параметр $\hbar/\tau_K$ в данном случае равен ε_0; его зависимость от температуры описывается формулой (8.40). Следовательно, в рассматриваемой области $[\Delta\tau_K/\hbar \ll 1$, т. е. $(H^* - H)/H^* \ll 1]$, *„грязный" сплав всегда является бесщелевым сверхпроводником.* Это предсказание теории было подтверждено

[1]) Зависимость $N_s(\mathbf{r})$ непосредственно может быть измерена на опыте с помощью туннельной методики.

в недавних туннельных экспериментах Гийона и др. [124] на различных сплавах в области полей от $H \lesssim H_{c2}$ до H_{c3}. В частности, было показано, что интервал энергий (в единицах $\hbar/\tau_K = \varepsilon_0$), в пределах которого плотность состояний отличается от ее величины $N(0)$ в нормальном состоянии, имеет конечную ширину даже при очень малых значениях параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$ (т. е. при полях H, весьма близких к полю H^*). Фактически такие измерения позволяют довольно точно определить параметр τ_K. В заключение отметим, что *чистые* сверхпроводники второго рода также, строго говоря, являются бесщелевыми в поле $H > H_{c1}$ (см. задачу на стр. 156).

ЛИТЕРАТУРА

Роль магнитных примесей и бесщелевая сверхпроводимость

Теория

Абрикосов А. А., Горьков Л. П., ЖЭТФ, 39, 1781 (1960).

Эксперимент

Woolf M. A., Reif F., Phys. Rev., **A137**, 557 (1965).

Явления в сильном магнитном поле

Теория

Maki K., Physics, **1**, 21, 127 (1964).
De Gennes P. G., Tinkham M., Physics, **1**, 107 (1964).
De Gennes P. G., Phys. Kond. Materie, 3, 79 (1964).

Эксперимент

Guyon E., Adv. Phys., **15**, 417 (1966).

БИБЛИОГРАФИЯ [1])

Обзоры и монографии

London F., Superfluids, vol. I, New York, 1950.
Шенберг Д., Сверхпроводимость, ИЛ, 1955.
Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Новый метод в теории сверхпроводимости, изд-во АН СССР, 1958.
Физика низких температур, сб. статей, ИЛ, 1959.
Бардин Дж., Шриффер Дж., Новое в изучении сверхпроводимости, М., 1962.
Линтон Э., Сверхпроводимость, изд-во «Мир», 1964.
Lynton E. A., Superconductivity, 2d ed., London, 1965.
Blatt J. M., Theory of Superconductivity, New York, 1964.
Schrieffer J., Theory of Superconductivity, New York, 1964. (Готовится русский перевод.)
Tinkham M., Superconductivity, New York, 1965.
Quantum Fluids, ed. D. F. Brewer, Amsterdam, 1966.
Дуглас Д., Фаликов Л., Энергетическая щель в сверхпроводниках, в сб. «Сверхпроводимость», М., 1967.
Жарков Г. Ф., Туннельный эффект Джозефсона в сверхпроводниках, в сб. «Сверхпроводимость», М., 1967.
Goodman B. B., Type II Superconductors, Report on Progress in Physics, vol. 29, London, 1966, Pt. 2.
Saint-James D., Sarma G., Thomas E. J., II Type Superconductivity, London, 1968.

Цитированная литература

1. Kammerlingh Onnes H., Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden., No. 119b, 120b, 122b, 124c (1911).
2*. Matthias B. T. et al., Science, **156**, 645 (1967).
3*. Schooley J. F., Hosler W. R., Cohen M. L., Phys. Rev. Lett., **12**, 474 (1964).
4*. Schooley J. F., Hosler W. R., Ambler E., Becker J. H., Cohen M. L., Koonce C. S., Phys. Rev. Lett., **14**, 305 (1965).
5. London H., London F., Proc. Roy. Soc., **A149**, 71 (1935).
6. London H., London F., Physica, **2**, 341 (1935).
7. Meissner W., Ochsenfeld R., Naturwiss., **21**, 787 (1933).
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1959.
9. Douglass D. H., Jr., Falicov L. M., в книге Low Temperature Physics, ed. C. J. Gorter, vol. IV, Amsterdam, 1964. (Имеется перевод в сб. «Сверхпроводимость», М., 1967.)

---

[1]) Составлена переводчиком. Библиография содержит: а) работы, цитируемые автором в тексте книги, б) работы, упомянутые автором без указания точных библиографических данных, в) работы, цитированные в примечаниях редактора перевода (отмечены звездочкой). — *Прим. ред.*

10. Pippard A. B., Proc. Roy. Soc., **A216**, 547 (1953).
11. Pippard A. B., Physica, **19**, 765 (1953).
12*. Физика низких температур, сб. статей, ИЛ, 1959.
13. Sarachik M. P., Garvin R. L., Erlbach E., Phys. Rev. Lett., **4**, 52 (1960).
14. Casimir H. B. G., Physica, **7**, 887 (1940).
15. Шальников А. И., Шарвин Ю. В., ЖЭТФ. **18**, 102 (1948).
16. Bardeen J., Schrieffer J. R., в книге Low Temperature Physics, ed. C. J. Gorter, vol. III, Amsterdam, 1961. (Имеется перевод: Дж. Бардин, Дж. Шриффер, Новое в изучении сверхпроводимости, М., 1962.)
17. Drangeid K. E., Sommerhalder R., Phys. Rev. Lett., **8**, 467 (1962).
18. Drangeid K. E., Sommerhalder R., IBM Journ., **8**, 13 (1964).
19. Peierls R., Proc. Roy. Soc., **A155**, 613 (1936).
20. London F., Physica, **3**, 450 (1936).
21. London F., Superfluids, vol. I, New York, 1950.
22. Buck D. A., Proc. IRE, **44**, 482 (1956).
23. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **7**, 371 (1937).
24*. Лифшиц Е. М., Шарвин Ю. В., ДАН СССР, **79**, 783 (1951).
25. Мешковский А. Г., Шальников А. И., ЖЭТФ, **17**, 851 (1947).
26. Schawlow A. L., Matthias B. T., Lewis H. W., Devlin G. E., Phys. Rev., **95**, 1344 (1954).
27*. Балашова В. М., Шарвин Ю. В., ЖЭТФ, **31**, 40 (1956).
28. Faber T. E., Proc. Roy. Soc., **A248**, 460 (1958).
29*. Sarma N. V., Moon J. R., Phys. Lett., **A24**, 580 (1967).
30. De Sorbo W., Phys. Rev. Lett., **4**, 406 (1960).
31. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **13**, 377 (1943).
32. Шубников Л. В., Хоткевич В. И., Шепелев Ю. Д., Рябинин Ю. Н., ЖЭТФ, **7**, 221 (1937).
33. Абрикосов А. А., ЖЭТФ, **32**, 1442 (1957).
34. Goodman B. B., IBM Journ., **6**, 63 (1962).
35. Goodman B. B., Rev. Mod. Phys., **36**, 12 (1964).
36. McConville T., Serin B., Phys. Rev. Lett., **13**, 365 (1964).
37. McConville T., Serin B., Rev. Mod. Phys., **36**, 112 (1964).
38*. Ferreira da Silva J., Burgemeister E. A., Dokopoul Z., Phys. Lett., **A25**, 354 (1967).
39. Onsager L., Nuovo Cim., **6**, 249 (1949).
40. Feynman R. P., в книге Progress in Low Temperature Physics, ed. C. J. Gorter, vol. I, Amsterdam, 1955, ch. II.
41. Morse P., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, New York, 1953, ch. 10. (Имеется перевод: Ф. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, 1960, гл. 10.)
42. Pearl J., Appl. Phys. Lett., **5**, 65 (1964).
43. Matricon J., Phys. Lett., **9**, 289 (1964).
44. Kleiner W. H., Roth L. M., Autler S. H., Phys. Rev., **A133**, 1226 (1964).
45. Joiner W. C. H., Blaugher R. D., Rev. Mod. Phys., **36**, 67 (1964).
46. Cribier D., Jacrot B., Rao L. M., Farnoux B., Phys. Lett., **9**, 106 (1964).
47. Cribier D., Jacrot B., Farnoux B., Rao L. M., Journ. Appl. Phys., **37**, 952 (1966).
48. Pincus P., Gossard A. C., Jaccarino V., Wernick J. H., Phys. Lett., **13**, 21 (1964).
49*. Шмидт В. В., ЖЭТФ, **46**, 649 (1964).
50. Gossard A. C., Jaccarino V., Wernick J. H., Journ. Appl. Phys., **36**, 1190 (1965).
51. Abraham A., Principles of Nuclear Magnetism, London, 1961. (Имеется перевод: А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, 1963.)

52. Caroli C., Matricon J., Phys Kond. Materie, **3**, 380 (1965).
53. Bean C. P., Livingston J. D., Phys. Rev. Lett., **12**, 14 (1964).
54. De Gennes P. G., Solid State Comm., **3**, 127 (1965).
55. Joseph A. S., Tomasch W. J., Phys. Rev. Lett., **12**, 219 (1964).
56. De Blois R. W., De Sorbo W., Phys. Rev. Lett., **12**, 499 (1964).
57. De Gennes P. G., Matricon J., Rev. Mod Phys., **36**, 45 (1964).
58. Kim J. B., Hempstead C. F., Strnad A. R., Phys. Rev., **A139**, 1163 (1965).
59. Bean C. P., Phys. Rev. Lett., **8**, 250 (1962).
60. Bean C. P., Rev. Mod. Phys., **36**, 31 (1964).
61. Anderson P. W., Kim Y. B., Rev. Mod. Phys., **36**, 39 (1964).
62. Cooper L. N., Phys. Rev., **104**, 1189 (1956).
63. Schiff L. I., Quantum Mechanics, 2d ed., New York, 1955, ch. 9. (Имеется перевод: Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ. 1958, гл. 9.)
64 Frölich H., Phys. Rev., **79**, 845 (1950). (Имеется перевод в сб. «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1960, стр. 11.)
65. Pines D., Phys. Rev., **109**, 280 (1958). (Имеется перевод в сб. «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1960, стр. 186.)
66 Bardeen J., Pines D., Phys. Rev., **99**, 1140 (1955)
67. Pines D., The Many Body Problems, New York, 1961. (Имеется перевод: Д. Пайнс, Проблема многих тел, ИЛ, 1963.)
68. Maxwell E., Phys. Rev., **78**, 477 (1950).
69. Reynolds C. A., Serin B., Wright W. H., Nesbitt L. B., Phys. Rev., **78**, 487 (1950).
70 Morel P., Anderson P. W., Phys. Rev., **125**, 1263 (1962)
71. Pines D., Elementary Excitations in Solids, New York, 1963. (Имеется перевод: Д. Пайнс, Элементарные возбуждения в твердых телах, изд-во «Мир», 1965.)
72. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, М., 1963.
73. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev., **108**, 1175 (1957). (Имеется перевод в сб. «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1960, стр. 103.)
74 Боголюбов Н. Н., ЖЭТФ. **34**, 58 (1958).
75* Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., Новый метод в теории сверхпроводимости, изд-во АН СССР, 1958.
76 Valatin J. G., Nuovo Cim., **7**, 843 (1958).
77. Giaever I., Phys. Rev. Lett., **5**, 147; **6**, 464 (1960).
78. Josephson B., Phys. Lett., **1**, 251 (1962).
79. Anderson P. W., Rowell J., Phys. Rev. Lett., **10**, 230 (1963).
80. Ferrel R. A., Prange R., Phys. Rev. Lett., **10**, 479 (1963).
81. Garland J. W., Phys. Rev. Lett., **11**, 111, 114 (1963).
82. Morse R. W., IBM Journ., **6**, 58 (1962).
83 Hebel L. C., Slichter C. P., Phys. Rev., **107**, 401 (1957).
84. Masuda Y., Redfield A. G., Phys. Rev., **125**. 159 (1962).
85. Боголюбов Н. Н., УФН, **67**, 549 (1959).
86. Cyrot M., Phys. Kond. Materie, **3**, 374 (1965).
87. Doll R., Näbauer M., Phys. Rev. Lett., **7**, 51 (1961).
88. Deaver B. S., Fairbank W. M., Jr., Phys. Rev. Lett., 7, 43 (1961).
89. Brönig W., Phys. Rev. Lett., 7, 337 (1961).
90. Caroli C., De Gennes P. G., Matricon J., Phys. Lett., **9**, 307 (1964).
91*. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.
92 Caroli C., De Gennes P. G., Matricon J, Journ. Phys. Rad., **23**, 707 (1962). (Имеется перевод в книге «Строение металлических твердых растворов», М., 1966.)
93 Anderson P. W., Journ, Phys. Chem. Solids, **11**, 26 (1959).

94. Rickaysen G., Phys. Rev., **115**, 795 (1959).
95. Pippard A. B., Adv. Electronics, ed. L. Morton, vol. 6, New York, 1954.
96*. Mattis D. C., Bardeen J., Phys. Rev., **111**, 412 (1958). (Имеется перевод в сб. «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1960, стр. 172.)
97. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964.
98. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **20**, 1064 (1950).
99. Гинзбург В. Л., ДАН СССР, **118**, 464 (1958).
100. Bremer J. W., Newhouse V. L., Phys. Rev., **116**, 309 (1959).
101. Little W. A., Parks R. D., Phys. Rev. Lett., **9**, 9 (1962).
102. Parks R. D., Little W. A., Phys. Rev., **A133**, 97 (1964).
103. Tinkham M., Phys. Rev., **129**, 2413 (1963).
104. Tinkham M., Rev. Mod. Phys., **36**, 268 (1964).
105*. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ, **42**, 299 (1962).
106. Гизбург В. Л., ДАН СССР, **83**, 385 (1952).
107. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ, **34**, 113 (1958).
108. Douglass D. H., Jr., Phys. Rev. Lett., **6**, 346; **7**, 14 (1961).
109. Douglass D. H., Jr., IBM Journ., **6**, **44** (1962).
110. Saint-James D., De Gennes P. G., Phys. Lett., **7**, 306 (1963).
111. Burger J. P., Detscher G., Guyon E., Martinet A., Solid State Comm., **2**, 101 (1964).
112. Burger J. P., Deutscher G., Guyon E., Martinet A., Phys. Rev., **A137**, 853 (1965).
113. Faber T. E., Proc. Roy. Soc., **A214**, 392 (1952); **A241**, 531 (1957).
114. Kinsel T., Lynton E. A., Serin B., Phys. Lett., **3**, 30 (1962).
115. Горьков Л. П., ЖЭТФ, **36**, 1918; **37**, 1407 (1959).
116. Chiou C., Connell R. A., Seraphim D. P., Phys. Rev., **129**, 1070 (1963).
117. Olsen J. L., Electron Transport Properties in Metals, New York, 1962, p. 80.
118*. Зайцев Р. О., ЖЭТФ, **48**, 644, 1759 (1965); **50**, 1055 (1966).
119. De Gennes P. G., Matricon J., Solid State Comm., **3**, 151 (1965).
120. Fiske M., Rev. Mod. Phys., **36**, 221 (1964).
121. Rowell J., Phys. Rev. Lett., **11**, 200 (1963).
122. Jacklevič R., Lambe J., Silver A., Mercereau J., Phys. Rev. Lett., **12**, 159 (1964).
123. Matthias B. T., IBM Journ., **6**, 250 (1962).
124. Guyon E., Martinet A., Matricon J., Pincus P., Phys. Rev., **A138**, 746 (1965).
125. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., ЖЭТФ, **39**, 1781 (1960).
126. De Gennes P. G., Tinkham M., Physics, **1**, 107 (1964).
127. De Gennes P. G., Phys. Kond. Materie, **3**, 79 (1964).
128*. Шапoвал Е. А., ЖЭТФ, **47**, 1007; **49**, 930 (1965).
129. Maki K., Physics, **1**, 21, **127** (1964). Erratum: Caroli C., Cyrot M., De Gennes P. G., Solid State Comm., **4**, 17, (1966).
130. Ruderman M. A., Kittel C., Phys. Rev., **96**, 99 (1954).
131. Kondo J., Progr. Theor. Phys., **33**, 575 (1965).
132. Reif F., Woolf M. A., Phys. Rev. Lett., **9**, 315 (1962).
133. Woolf M. A., Reif F., Phys. Rev., **A137**, 557 (1965).
134. Helfand E., Werthamer N. R., Phys. Rev. Lett., **13**, 686 (1964).
135*. Helfand E., Werthamer N. R., Phys. Rev., **147**, 288 (1966).
136*. Sarma N. V., Phys. Lett., **A25**, 315 (1967).
137. Bucher E., Heiniger F., Müller J., Phys. Kond. Materie, **2**, 210 (1964).
138. Труды X Международной конференции по физике низких температур, М., 1967.
139*. Абрикосов А. А., ЖЭТФ, **47**, 720 (1964).

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5

Предисловие 7

Глава I. Фуидаментальные свойства 9

§ 1. Новый тип конденсированного состояния 9

§ 2. Диамагнетизм 11

Уравнение Ф. и Г. Лондонов 11

Эффект Мейсснера 12

§ 3. Отсутствие возбуждений малых энергий 15

§ 4. Два типа сверхпроводников 19

Литература 21

Глава II. Магнитные свойства сверхпроводников первого рода . . . 22

§ 1. Критическое поле длинного цилиндра 22

§ 2. Глубина проникновения 25

Связь между током и полем в сверхпроводниках первого рода 25

Глубина проникновения 27

Методы измерения глубины проникновения 29

Обсуждение 31

Проникновение поля в чистые металлы при абсолютном нуле (31). Обобщение на случай сплавов (32). Изменение глубины проникновения с температурой (33).

§ 3. Магнитные свойства образцов произвольной формы. Промежуточное состояние 34

Происхождение промежуточного состояния 34

Некоторые термодинамические соотношения 37

Определение свободной энергии (37). Определение индукции (37). Определение напряженности магнитного поля **H** (38).

Термодинамический потенциал для фиксированных значений T и j_e 40

Связь между **B** и **H** в промежуточном состоянии 40

Применения 42

Критический ток в сверхпроводящей проволоке (43). Принцип криотрона (44).

Микроскопическая структура промежуточного состояния . . . 45

Парадокс (49). Природа поверхностной энергии (49).

Литература 52

Глава III. Магнитные свойства сверхпроводников второго рода . . . 53

§ 1. Кривые намагничивания длинного цилиндра 53
§ 2. Микроскопическое описание вихревого состояния 59
Отрицательная поверхностная энергия 59
Свойства изолированной вихревой нити 62
Обсуждение формулы (3.39) (64).
Взаимодействие вихревых нитей 67
Случай двух нитей (67). Кривые намагничивания (69). Нижнее поле H_{c1} (70). Поле, немного превышающее H_{c1} (70). Область $1/\lambda^2 \ll n_L \ll 1/\xi^2$ (73). Область $n_L \sim \xi^{-2}$ (75).
Движение вихревых нитей 83
§ 3. Неравновесные свойства 85
Критическое состояние при абсолютном нуле 86
Движение вихревых нитей при $T \neq 0$ 92
Заключительные замечания (95).
Литература 95

Глава IV. Описание конденсированного состояния 98

§ 1. Неустойчивость нормального состояния при наличии притяжения между частицами 96
§ 2. Природа притяжения 99
Квантовомеханическое описание 99
Описание с помощью диэлектрической проницаемости 101
Модель «желе» (102).
Численные значения констант взаимодействия 105
§ 3. Основное состояние и элементарные возбуждения 107
Выбор пробной волновой функции 107
Алгебраические преобразования 108
Определение энергии основного состояния 111
Низшие возбужденные состояния 117
Случай двух связанных сверхпроводников 120
§ 4. Вычисления при конечных температурах 124
Определение свободной энергии 124
Изменение щели с температурой и точка перехода 126
Изотопический эффект (128). Учет кулоновского отталкивания (128).
Вычисление термодинамических величин 131
Формулы для вероятностей переходов 133
Применения (137).
Литература 139

Глава V. Метод самосогласованного поля 140

§ 1. Уравнения Боголюбова 140
Определение эффективных потенциалов 142
Уровни энергии эффективного гамильтониана 142
Выбор потенциалов U и Δ 144

§ 2. Некоторые теоремы о потенциале спаривания и спектре возбуждений 148
Градиентная инвариантность 148
Специальные выборы калибровки (150).
Квантование потока 150
Край спектра возбуждений в неоднородных системах 157
Немагнитные сплавы. Теорема Андерсона 159
§ 3. Эффект Мейсснера в металлах и сплавах 161
Учет магнитного поля как возмущения 161
Связь диамагнитного отклика с проводимостью системы в нормальном состоянии 164
Расчет диамагнитных токов 168
Литература 171

Глава VI. Феноменологические уравнения Гинзбурга — Ландау . . . 172

§ 1. Введение 172
§ 2. Построение свободной энергии 173
§ 3. Уравнения равновесия 177
§ 4. Две характерные длины 178
§ 5. Задачи с постоянным значением амплитуды параметра порядка $|\psi|$ 183
Критический ток в тонкой пленке 184
Эффект Литтла и Паркса 187
Пластина в параллельном поле 190
§ 6. Изменение амплитуды $|\psi|$ в пространстве 196
Образование зародышей внутри массивного образца 196
Образование зародышей вблизи поверхности образца 197
§ 7. Структура смешанного состояния в сильных полях $H \sim H_{c2}$ 203
Литература 210

Глава VII. Микроскопический анализ уравнений Гинзбурга—Ландау 211

§ 1. Линеаризация уравнения самосогласованности 211
Учет Δ по теории возмущений 211
Выделение магнитных эффектов 213
Бесконечная однородная среда 215
Связь ядра K_0 с функцией корреляции 215
Явное выражение для ядра K_0 217
§ 2. Уравнения Гинзбурга — Ландау 220
Введение нелинейных членов в уравнение самосогласованности 220
Гипотеза о медленности изменений 221
Обсуждение коэффициентов 222
§ 3. Поверхностные задачи и уравнения Гинзбурга — Ландау . . 227
Граничные условия на поверхности раздела 227
Контакт сверхпроводника с диэлектриком (или вакуумом) 230
Контакт между сверхпроводником и нормальным металлом 232
Контакт $S-N-S'$ 234
Микроскопический расчет M_{ij} для диэлектрического слоя (239). Распределение полей и токов в области контакта (241).
Литература 246

Глава VIII. Эффекты в сильных магнитных полях и роль магнитных примесей 247

§ 1. Температура перехода и свойства системы при обращении времени 249

§ 2. Эргодическое и неэргодическое поведение. Бесщелевая сверхпроводимость 255

Неэргодические системы 257

Эргодические (марковские) системы 259

Примеры «эргодических» систем (261).

Бесщелевая сверхпроводимость 265

§ 3. «Грязный» сверхпроводник в сильном магнитном поле . . . 267

Теорема о локальной плотности состояний (271).

Литература 272

Библиография 273

П. ДЕ ЖЕН

Сверхпроводимость металлов и сплавов

Редактор *И. Г. Нахимсон* Художник *Л. М. Муратова*

Художественный редактор *П. Ф. Некундэ* Технический редактор *Т. В. Чечик*

Корректор *К. Г. Кривда*

Сдано в производство 22/XII 1967 г. Подписано к печати 12/VI 1968 г. Бумага № 1 60×90¹/₁₆=8,75 бум. л. Печ. л. 17,50. Уч.-изд. л. 16,29. Изд. № 2/4505. Цена 1 р. 35 к. Зак. 1020.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.